3 définitions de $\vec{u}\,.\,\vec{v}$

Remarque

$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$"

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le **nombre réel** défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

Le plan est muni d'un repère **orthonormé**. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. On a alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et θ une mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$. Alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\theta$$

1,2,3,4 p.259 + 2 p.256

aide : p.258 + ex. corrigé p.259

1 **a.** $\vec{AB}\cdot\vec{AD} = AB \times AD \times \cos\widehat{BAD} = 8$;

b. $\vec{BA}\cdot\vec{BC} = 4\times4\left(-\frac{1}{2}\right) = -8$;

c. $\vec{DB}\cdot\vec{CD} = 4\times4\left(-\frac{1}{2}\right) = -8$;

d. $\vec{AD}\cdot\vec{CB} = \vec{AD}\cdot\vec{DA} = -16$;

e. $\vec{BD}\cdot\vec{CA} = 0$.

2 **1** $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.

2 On a :

$\|\vec{BC}\|^2 = (\vec{BC})^2 = (\vec{AC}-\vec{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\vec{AB}\cdot\vec{AC}$.

On obtient $\|\vec{BC}\|^2 = 18 - 9\sqrt{2}$.

3 $\vec{BA}\cdot\vec{BC} = \vec{BH}\cdot\vec{BC} = BH\times BC = \frac{1}{2}BC^2$

$\vec{BA}\cdot\vec{BC} = \frac{18-9\sqrt{2}}{2}$, où H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC), c'est-à-dire le milieu du segment $[BC]$, puisque le triangle ABC est isocèle en A.

3 Figure ❶ :

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC} = 5\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$.

Figure ❷ :

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB}-\vec{AC}\|^2\right)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \frac{1}{2}(25+36-9) = 26$.

Figure ❸ : $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AC\times AH = 24$.

Figure ❹ : $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix} = 21-4 = 17$.

4 $\vec{u}\cdot\vec{v} = 10-3 = 7$; $\vec{u}^2 = 4+9 = 13$;

$\|\vec{v}\| = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$.

Activité 2

1 **a.** $\|\vec{u}\| = AB = \sqrt{(5-1)^2+(1-3)^2} = 2\sqrt{5}$;

$\|\vec{v}\| = BC = \sqrt{(4-5)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{5}$;

$\|\vec{u}+\vec{v}\| = AC = \sqrt{3^2+(-4)^2} = 5$.

b. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 25-20-5 = 0$.

c. $AC^2 = AB^2 + BC^2$, donc le triangle ABC est rectangle en B.

2 **a.** $\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{x^2+y^2}$, où M a pour coordonnées $(x\,;y)$ dans (O, I, J).

$\|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2+y'^2}$;

$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}$;

$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$.

b. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

$= (x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2+y^2) - (x'^2+y')^2$

$= 2(xx'+yy')$.

c. On trouve de même :

$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(xx'+yy')$.

3 **a.** Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et si $xx'+yy' = 0$, alors le triangle ABC, où $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{BC} = \vec{v}$, est rectangle en B et par suite l'angle $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ modulo π.

b. Cette phrase est vraie. Considérons le parallélogramme $ABCD$, posons $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{BC} = \vec{v}$, alors $\vec{DC} = \vec{u}$, $\vec{AD} = \vec{v}$, et pour les diagonales :

$\vec{AC} = \vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{DB} = \vec{u}-\vec{v}$.

$AC^2 + DB^2 = \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$

$AC^2 + DB^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(xx'+yy')$
$\qquad + \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(xx'+yy')$

$AC^2 + DB^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$

$AC^2 + DB^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.