MÉTHODE 1 Étudier une variable aléatoire

Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

1) on détermine les valeurs x_i que peut prendre X ;
2) on calcule les probabilités $P(X = x_i)$;
3) on résume les résultats dans un tableau.

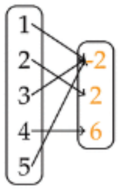
Exercice d'application

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5.
Un joueur participe à la loterie en payant 2 €, ce qui lui donne le droit de prélever au hasard un jeton dans l'urne.

- Si le numéro est pair, il gagne en euros le double de la valeur indiquée par le jeton.
- Si le numéro est impair, il perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au « gain algébrique ».
Déterminer la loi de probabilité de X.

Correction



L'univers est l'ensemble des 5 jetons.
Les cinq issues sont équiprobables.
Les jetons 1, 3 et 5 font perdre 2 euros ;
le jeton 2 fait gagner $2 \times 2 - 2 = 2$ euros ;
le jeton 4 fait gagner $4 \times 2 - 2 = 6$ euros.
X peut prendre les valeurs -2 ; 2 et 6.
L'événement $(X = -2)$ est réalisé pour les issues 1 ; 3 ; 5 donc $P(X = -2) = \frac{3}{5}$.
L'événement $(X = 2)$ est réalisé pour l'issue 2 donc $P(X = 2) = \frac{1}{5}$.
L'événement $(X = 6)$ est réalisé pour l'issue 4 donc $P(X = 6) = \frac{1}{5}$.
On présente la **loi de probabilité** de X dans un tableau.

x_i	-2	2	6
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

MÉTHODE 2 Appliquer une transformation affine

Exercice d'application

Un coiffeur se déplace à domicile.
On note X le nombre de rendez-vous sur une journée.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,03	0,09	0,15	0,38	0,18	0,17

Chaque rendez-vous lui rapporte 30 euros, et ses frais de fonctionnement quotidiens s'élèvent à 15 euros.
On note Y son gain journalier.

1) Calculer $E(X)$.
2) Quelle relation lie X et Y ?
3) En déduire $E(Y)$.

Correction

1) $E(X) = 0,03 \times 0 + 0,09 \times 1 + 0,15 \times 2 + 0,38 \times 3 + 0,18 \times 4 + 0,17 \times 5$

$E(X) = 3,1$.

2) Le gain journalier Y est tel que $Y = 30X - 15$.
3) $E(Y) = E(30X - 15)$
$= 30E(X) - 15$
$= 30 \times 3,1 - 15$
$= 93 - 15$

$E(Y) = 78$ (en euros).
Ainsi, le coiffeur peut espérer gagner 78 euros en moyenne par jour.

MÉTHODE 3 Interpréter l'espérance et la variance

Exercice d'application

On donne les lois de probabilités du gain X et Y de deux jeux.

Jeu nº 1

x_i	-5	-1	0	1	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3

Jeu nº 2

y_i	-3	-1	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Quel jeu peut-on conseiller au joueur ?

Correction

Pour le jeu nº 1 : $E(X) = -0,3$, $V(X) = 8,01$ et $\sigma(X) \approx 2,83$.
Pour le jeu nº 2 : $E(Y) = -0,3$, $V(Y) = 1,81$ et $\sigma(Y) \approx 1,35$.
Les deux jeux ont la même espérance de gain, celle-ci étant négative. Les jeux sont **défavorables** aux joueurs, on peut donc les déconseiller.
L'écart-type mesure la dispersion des gains autour de l'espérance, donc il évalue le **risque du jeu**. Ici, $\sigma(Y) < \sigma(X)$.
Si un joueur veut vraiment participer, il vaut mieux lui conseiller le jeu nº 2 pour lequel le degré de risque est moins grand.