DM : Maths 6

(Éléments de correction)

À la recherche d'une fonction

Une expression sous la racine carrée doit être positive ou nulle.

La fonction f est définie donc sur $[-b\ ;\ +\infty[$ car $x + b > 0$. On obtient ainsi $b = 3$.

On a également :

$$f(1) = 0 \implies a\sqrt{0+3} + c \ = \ 0 \implies 2a + c \ = \ 0$$

et

$$f(13) = 1 \implies a\sqrt{13+3} + c = 1 \implies 4a \ + c \ = 1$$

D'où le système suivant : $\begin{cases} 2a + c = 0 \\ 4a + c = 1 \end{cases} \implies \dots \implies \begin{cases} a = 0{,}5 \\ c \ = -1 \end{cases}$

On a donc $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+3} - 1$.

La perche

Soit x la longueur de la perche.

On obtient, d'après le Théorème de Pythagore,

$$x^2 = (x-20)^2 + (x-40)^2 \implies x^2 - 120x + 2000 = 0 \implies \dots \implies x = 20 \ ou \ x = 100$$

Or, comme $x > 40$, $S = \{100\}$.

La perche mesure 1 m de long et la porte a pour dimensions 60 cm de largeur et 80 cm de hauteur.

Visibilité

Les camions roulent à la même vitesse.

Soit x la distance parcourue par les deux camions.

On se place dans un repère orthonormé (O, I, J) où (OI) et (OJ) représentent les trajectoires perpendiculaires.

Soient $C(\, 8 - x\,; 0)$ et $D(\, 0\,; 10 - x\,)$ les points qui représentent les positions des camions.

Soit d la distance qui sépare les deux camions.

On a :

$$d^2 \;=\; (x_D - x_C)^2 + \;(y_D - y_C)^2 = \ldots \;=\; 2x^2 - 36x + 164$$

Le trinôme du second degré $2x^2 - 36x + 164$ a pour sommet $(\,9\,;\;2)$.

Le carré de la distance admet comme minimum 2 quand les camions ont parcouru 9 km.

La plus petite distance qui les sépare est donc $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ km , ils ne pourront pas se voir car la visibilité est de 1,3 km.

Autre possibilité :

Résoudre l'inéquation :

$$2x^2 - 36x + 164 \;\leq\; 1{,}3^2 \;\Longrightarrow 2x^2 - 36x + 162{,}31 \;\leq\; 0$$

L'inéquation n'a pas de solution ($\Delta < 0$ et $a > 0$) et donc les camions ne pourront pas se voir.

Poignées de mains

Chaque personne serre la main à toutes les autres personnes présentes.

Chaque poignée est réalisée par 2 personnes.

Le produit $n(n-1)$ compte donc 2 fois le nombre de poignées de mains.

On obtient donc $\frac{n(n-1)}{2}$ poignées de mains au total.

DM : Maths 7

Devinettes

Il faut d'abord faire un schéma du cercle trigonométrique et penser aux conditions de cosinus et sinus ainsi qu'aux intervalles de l'énoncé.

Les angles qui ont pour cosinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ont pour mesure principale $\frac{\pi}{6}$ ou $-\frac{\pi}{6}$.

Ils peuvent donc être écrits sous la forme $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

Le seul nombre de cette forme qui appartient à $[\ 3\pi\ ;\ 4\pi\ ]$ est $-\frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{23\pi}{6}$.

Les angles qui ont pour sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ont pour mesure principale $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$.

Ils peuvent donc être écrits sous la forme $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

Comme il s'agit du double, les angles cherchés sont de la forme $\frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $\frac{2\pi}{6} + k\pi$.

Les seuls nombres qui vérifient ces condictions et appartiennent à l'intervalle $[\ 10\pi\ ;\ 11\pi\ ]$ sont $\frac{\pi}{6} + 10\pi = \frac{61\pi}{6}$ et $\frac{2\pi}{6} + 10\pi = \frac{31\pi}{3}$.

Au vent

Soit f l'expression dévelopée de la parabole, on a $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Comme elle passe par le point $A(\ 0\ ;\ 7\ )$, on a : $a\times 0^2 + b\times 0 + c = 7 \implies c = 7$

De plus, le sommet a pour coordonées $(\ 5/2\ ;\ 15/2)$ ...

On obtient donc l'expression $f(x) = \frac{-2}{25}x^2 + \frac{2}{5}x + 7$.

Comme l'auvent est rectiligne et se fait sans cassure, le prolongement doit être tangent à la parabole au point A.

Le point B appartient donc à la droite tangente à la parabole au point A, d'abscisse 0.

Le coefficient directeur de cette droite est donné par $f'(0)$.

La fonction f est de la forme $f = u + v$, avec $u(x) = \frac{-2}{25}x^2$, $v(x) = \frac{2}{5}x + 7$.

D'après le cours, $(u + v)' = u' + v'$.

On a $u'(x) = \frac{-2}{25}\times 2x$ et $v'(x) = \frac{2}{5}$.

On obtient ainsi, $f'(x) = \frac{-4}{25}x + \frac{2}{5}$ et donc $f'(0) = \frac{2}{5}$.

Le point B a pour coordonées $(-4\ ;\ y_B)$, comme il appartient à la droite tangente à la parabole au point A, on obtient :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{y_B - 7}{-4 - 0} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow y_B = \frac{-27}{5}$$

On obtient donc $B(-4; \frac{-27}{5})$ et $AB = \sqrt{((x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)} = \ldots = \frac{4\sqrt{29}}{5}$ m .

Jeu SMS

Soit Y la variable aléatoire qui donne la valeur du cadeau obtenu par un participant.

On a

Y	0	10	20	2000
$P(Y)$	$\frac{99887}{100000}$	$\frac{100}{100000}$	$\frac{10}{100000}$	$\frac{3}{100000}$

On obtient $E(Y) = \ldots = 0{,}072$.

Soit c le coût du SMS, on a $X = Y - c$.

Ainsi, $E[X] = E[Y - c] = E[Y] - c = 0{,}072 - c$.

Pour que le jeu soit équitable ila faut que $E[X] = 0 \Leftrightarrow 0{,}072 - c = 0 \Leftrightarrow c = 0{,}072$.

Métamorphose