I Suites arithmétiques

Définition
Une suite numérique (u_n) est dite ***arithmétique*** *s'il existe un nombre réel r, appelé* **raison** *de la suite, tel que, pour tout nombre entier naturel n, on ait :* $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.

Autrement dit, une suite est arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r.

Exemple
La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ est une suite arithmétique de raison ......

Propriété
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Pour tout entier naturel n, on a $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$.

Exemple
Dans l'exemple 1, on a alors $u_n =$ .... On peut directement calculer $u_{50} =$ ....

montrer qu'une suite est arithmétique

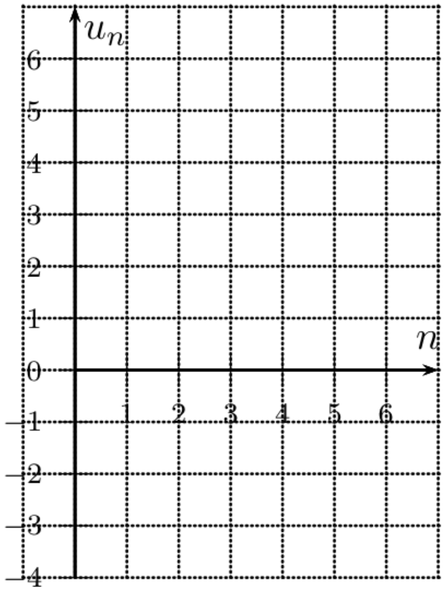
1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?

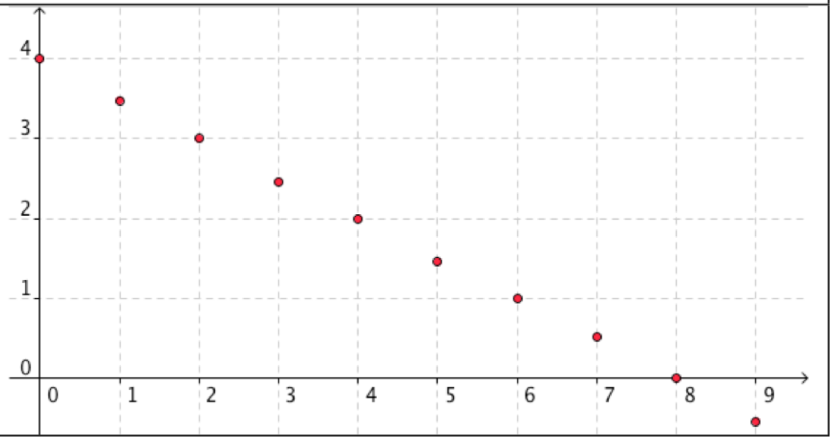
2) La suite (v_n) définie par : $v_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

Propriété
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
• Si $r > 0$, la suite (u_n) est croissante.
• Si $r < 0$, la suite (u_n) est décroissante.
• Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

On dit que les variations de la suite sont linéaires car les points de sa représentation se situent sur une droite. La raison de la suite arithmétique est le coefficient directeur de la droite correspondante d'équation $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemple
Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $r = -1,5$.
Sa représentation graphique est constituée de points situés sur la droite d'équation $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



RÉSUMÉ	(u_n) une **suite arithmétique** - de **raison** r - de premier terme u_0.	**Exemple :** $r=-0{,}5$ et $u_0=4$
Définition	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=u_n-0{,}5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à -0,5.
Propriété	$u_n=u_0+nr$	$u_n=4-0{,}5n$
Variations	Si $r>0$: (u_n) est croissante. Si $r<0$: (u_n) est décroissante.	$r=-0{,}5<0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés.	

Propriété
Soit n un entier naturel non nul, on a : $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. *On peut écrire* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1+2+3+\ldots+n$. Écrivons S_n de deux façons différentes :

$S_n =$ ....

$S_n =$ ....

En additionnant par colonne, on obtient :

....

Ainsi $2S_n =$ .... ce qui prouve que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Soit (u_n) une suite arithmétique.
La formule suivante donne la **somme de termes consécutifs** :

$$\text{Somme des termes consécutifs} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

En particulier, pour une suite arithmétique de premier terme u_0 :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k =$$

Calculer les sommes S_1 et S_2 suivantes :

$S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + 348$

$S_2 = 33 + 36 + 39 + ... + 267$

II Suites géométriques

Définition
Une suite numérique (u_n) *est dite* ***géométrique*** *s'il existe un nombre réel* q *non nul, appelé* ***raison*** *de la suite, tel que, pour tout nombre entier naturel* n*, on ait :* $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$.

Autrement dit, une suite est arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par un même nombre q *non nul.*

Exemple
La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n \end{cases}$ est une suite géométrique de raison ......

Propriété
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Pour tout entier naturel n, on a $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$.

Exemple
Dans l'exemple , on a alors $u_n =$ .... On peut directement calculer $u_4 =$ ....

Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

montrer qu’une suite est géométrique

La suite (u_n) définie par : $u_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

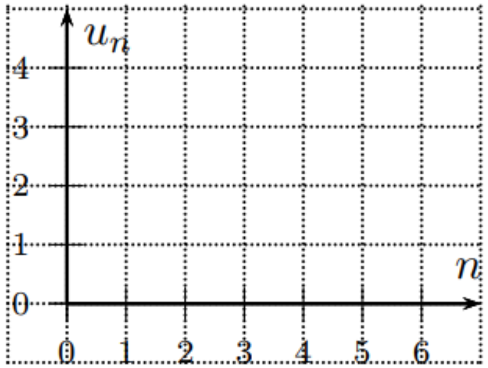
Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

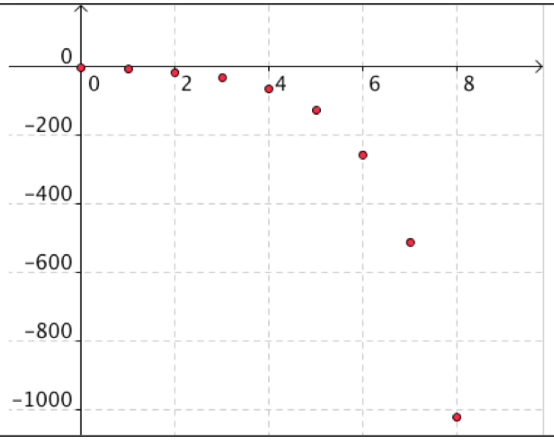
- Si $0 < q < 1$ alors : - la suite (u_n) est décroissante si $u_0 > 0$;
  - la suite (u_n) est croissante si $u_0 < 0$;
- Si $q > 1$ alors : - la suite (u_n) est croissante si $u_0 > 0$;
  - la suite (u_n) est décroissante si $u_0 < 0$;
- Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.

Exemple

La suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $\frac{1}{2}$ admet la représentation graphique ci-contre.



Elle est décroissante car $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$.

RÉSUMÉ	(u_n) une **suite géométrique** de **raison** q de premier terme u_0.	**Exemple :** $q = 2$ et $u_0 = -4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2 \times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n = u_0 \times q^n$	$u_n = -4 \times 2^n$
Variations	Pour $u_0 > 0$: Si q > 1 : (u_n) est croissante. Si 0 < q < 1 : (u_n) est décroissante. Pour $u_0 < 0$: Si q > 1 : (u_n) est décroissante. Si 0 < q < 1 : (u_n) est croissante.	$u_0 = -4 < 0$ $q = 2 > 1$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Si q < 0 : la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.	

Propriété
Soit n un entier naturel non nul et q un réel différent de 1, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration
On pose $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n$ **(1)**. On multiplie les deux membres par q :

$qS_n =$ ....

Par différence **(1)** $-$ **(2)**, on a ....

D'où ....donc $S_n =$ ....

Calculer la somme S suivante :

$S = 1+3+3^2+\ldots+3^{13}$

Propriété
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
La formule suivante donne **la somme des *n* premiers termes**

$$\text{Somme des termes consécutifs} = (\text{premier terme}) \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

En particulier, pour une suite géométrique de premier terme u_0 :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple
On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2.
On peut exprimer la somme des $n+1$ premiers termes de la suite :

$$S_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$$