Suites numériques

I Définition d'une suite numérique

Définition 1
*Une **suite numérique** est une liste ordonnée de nombres réels.*
On peut lui associer une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ par $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n). \end{array}$
*Pour tout entier naturel n, $u(n)$, noté aussi u_n, est le **terme de rang n** de la suite.*
On note (u_n) l'ensemble des termes de la suite.

Exemple 1

1. Soit (u_n) la suite des multiples de 7 avec $u_0 = 0$. On a alors $u_1 = \ldots$, $u_2 = \ldots\ldots$, $\ldots$, $u_9 = \ldots\ldots$
2. Dans certaines situations, la définition de la suite interdit l'existence de certains termes. Par exemple, la suite (v_n) telle que $v_n = \dfrac{1}{n}$ ne peut être définie que pour $n \geq \ldots$.

II Mode de génération d'une suite numérique

1) Définition par formule explicite

Exemple 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + 3$.
   Les premiers termes de la suite sont :
   $u_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n - 1$.
   Les premiers termes de la suite sont :
   $v_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $v_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $v_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $v_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

Remarques
- Dans l'exemple 2- 1., on a $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
Dans l'exemple 2- 2., on a $v_n = g(n)$ avec $g(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$.
- Une formule explicite permet de calculer directement le terme voulu.
Dans l'exemple 1, on peut calculer directement $u_{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2) Définition par une relation de récurrence

Exemple 3

1. $u_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, chaque terme u_n de la suite est la moitié du précédent.
   Les premiers termes de la suite sont :
   $u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
2. $v_0 = 10$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 5 - 3v_n$.
   Les premiers termes de la suite sont :
   $v_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $v_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $v_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$.
   Les premiers termes de la suite sont :
   $w_1 = \ldots\ldots$, $w_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $w_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

Remarques

- Dans l'exemple 3- 2., on a $v_{n+1} = f(v_n)$ avec $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$.
- Lorsque la suite est définie par une relation de récurrence, il faut connaître les termes précédents pour caculer un terme donné.

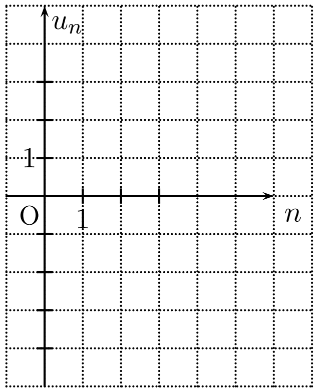
III Représentation graphique

Propriété 1
Une suite numérique (u_n) peut être représentée par un nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$.

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 4 \end{cases}$
Les premiers termes de la suite sont :

$u_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$,
$u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $u_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

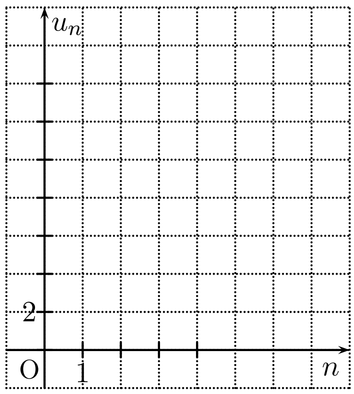
On peut représenter (u_n) par le nuage de points ci-contre.



IV Sens de variation

Définition 2
Soit k un entier et (u_n) une suite numérique.
- *(u_n) est dite **croissante** pour $n \geq k$ si pour tout $n \geq k$, $u_{n+1} \geq u_n$.*
- *(u_n) est dite **décroissante** pour $n \geq k$ si pour tout $n \geq k$, $u_{n+1} \leq u_n$.*
- *(u_n) est dite **constante** pour $n \geq k$ si pour tout $n \geq k$, $u_{n+1} = u_n$.*

Exemple 4
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (n-3)^2$.
Elle est représentée graphiquement par le nuage de points ci-contre. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante pour $n \geq \ldots$.
Pour démontrer ce résultat, on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.



$u_{n+1} - u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Or $2n - 5 \geq 0$ pour $n \geq \ldots\ldots$, c'est-à-dire pour $n \geq \ldots\ldots$ car $n \in \mathbb{N}$.
On en déduit que pour $n \geq \ldots\ldots$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et donc $u_{n+1} \ldots u_n$.
Par conséquent, (u_n) est croissante pour $n \geq \ldots$

Propriété 2
k est un entier.
On suppose que la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, où f est une fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
• Si f est croissante sur l'intervalle $[k; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante pour $n \geq k$.
• Si f est décroissante sur l'intervalle $[k; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante pour $n \geq k$.

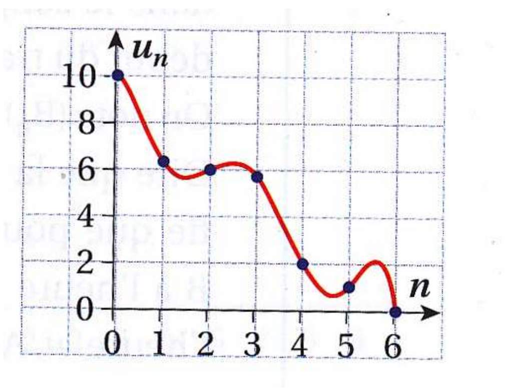
Démonstration
• Supposons que f est croissante sur l'intervalle $[k; +\infty[$.
Alors pour tous les réels a et b de $[k; +\infty[$, si $a < b$ alors ....
Pour tout entier $n \geq k$, comme $n < n+1$, on aura ...., c'est-à-dire ....
On en déduit que (u_n) est croissante pour $n \geq k$.
• On démontre de la même façon que si f est décroissante sur l'intervalle $[k; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante pour $n \geq k$.

Exemple 5
Dans l'exemple 4, la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ avec $f(x) =$ .... Or f est croissante sur l'intervalle .... donc la suite (u_n) est croissante pour $n \geq$ ......

Remarques

- La réciproque de la propriété 2 est fausse.

Sur la représentation ci-dessous, on a indiqué sur la courbe de f le nuage de points de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
La suite (u_n) est décroissante pour $n \geq 0$ mais la fonction f ne l'est pas sur l'intervalle $[0; 6]$.



- La propriété 2 ne s'applique pas aux suites définies par récurrence.

Par exemple, la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 3 \end{cases}$$
est telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction .... $f : x \mapsto$ ...., qui est strictement .... alors que la suite (u_n) est strictement ....