Dans tout ce chapitre $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ désignent des vecteurs du plan.

1. Définition du produit scalaire et orthogonalité

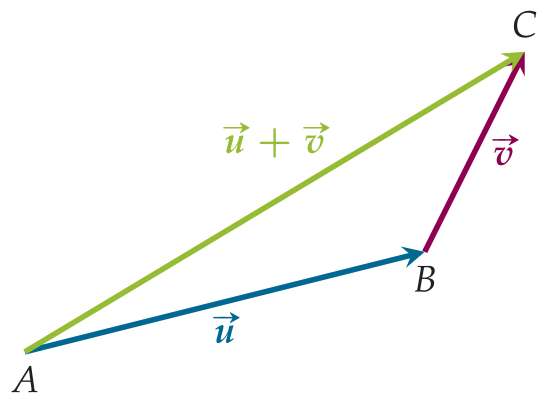
DÉFINITION

Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (qui se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ »), est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).$$

REMARQUES :

- Concrètement, cela correspond à la moitié de l'écart relatif entre AC^2 et $AB^2 + BC^2$ sur le graphique ci-dessous.



- Le produit scalaire de deux vecteurs n'est pas un vecteur mais **un nombre réel**.

Exemple Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 8$. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction

On a $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(BC^2 - BA^2 - AC^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(8^2 - 6^2 - 5^2\right) = \dfrac{3}{2}$.

PROPRIÉTÉ

1) Le produit scalaire est **commutatif**, c'est-à-dire que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

2) Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

3) $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est également noté $\vec{u}^2$, appelé « **carré scalaire** de $\vec{u}$ ».
On a alors $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.

PREUVE

1) On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\vec{v}+\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2\right)=\vec{v}\cdot\vec{u}$.

2) Si $\vec{u}=\vec{0}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{0}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{0}\right\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\vec{v}\|^2-0^2-\|\vec{v}\|^2\right)=0$.
Il en va de même si $\vec{v}=\vec{0}$.

3) $$\vec{u}^2=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{u}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{u}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|2\vec{u}\|^2-2\|\vec{u}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left((|2|\,\|\vec{u}\|)^2-2\|\vec{u}\|^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(4\|\vec{u}\|^2-2\|\vec{u}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(2\|\vec{u}\|^2\right)=\|\vec{u}\|^2.$$

DÉFINITION

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**, ce que l'on note $\vec{u} \perp \vec{v}$, si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

REMARQUE : Le vecteur nul est donc orthogonal à tout vecteur du plan.

PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ (2π).

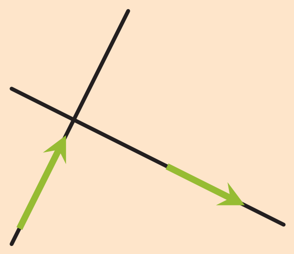
REMARQUES :

- Concrètement, cela veut dire que deux vecteurs non nuls sont orthogonaux quand ils « forment un angle droit ».
- Pour $k \neq 0$, on sait que $(\vec{u}\,;k\vec{v}) = (\vec{u}\,;\vec{v})$ ou $-(\vec{u}\,;\vec{v})$ (2π) donc si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$, alors $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

PREUVE Soit A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et C tel que $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ comme sur le graphique de la première remarque.
On a alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ainsi :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right)$.
Il en résulte que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right) = 0$
$\Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en B autrement dit $\left(\vec{u}; \vec{v}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $-\dfrac{\pi}{2}$ (2π).

PROPRIÉTÉ : Corollaire

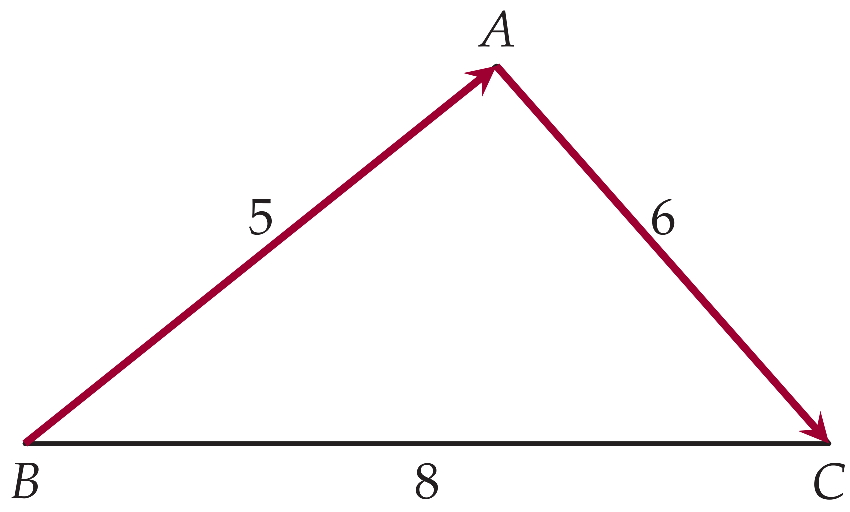
Deux droites du plan sont perpendiculaires si, et seulement si, un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.



Exemple Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 8$.
Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

Correction

D'après l'exemple précédent, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{2} \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux.
Cela veut dire que, sur la figure ci-contre, les droites (BA) et (AC) ne sont pas perpendiculaires donc que ABC n'est pas rectangle en A.



Remarque : Pour deux vecteurs de norme fixée, on dit que le produit scalaire est une mesure du **défaut d'orthogonalité** de ces deux vecteurs : plus il est proche de 0, plus l'angle formé par ces deux vecteurs « semble droit ».

2. Produit scalaire et coordonnées

Dans ce paragraphe, toutes les coordonnées sont données dans un repère **orthonormé** du plan.

PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

PREUVE Remarquons préalablement que $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+x')^2+(y+y')^2}^2 - \sqrt{x^2+y^2}^2 - \sqrt{x'^2+y'^2}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(x+x'\right)^2 + \left(y+y'\right)^2 - \left(x^2+y^2\right) - \left(x'^2+y'^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2-x^2-y^2-x'^2-y'^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2xx'+2yy'\right) = \frac{1}{2} \times 2(xx'+yy') = xx'+yy'.
\end{aligned}$$

REMARQUE : Cette formule n'est valable **que dans un repère orthonormé**.

MÉTHODE 1 Étudier la perpendicularité de deux droites

Exercice d'application

Soit quatre points $A(-1 ; 2)$, $B(5 ; 0)$, $C(3 ; 4)$ et $D(6 ; 13)$ dans un repère orthonormé.

Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Correction

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ donc :

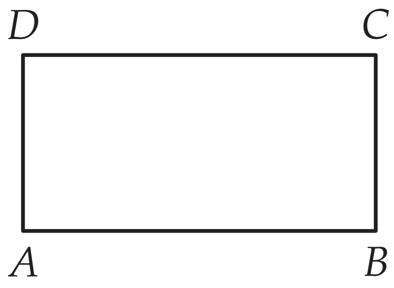
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 6 \times 3 + (-2) \times 9 = 18 - 18 = 0.$$

On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, vecteurs directeurs des deux droites, sont orthogonaux donc que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

MÉTHODE 2 Introduire un repère orthonormé pour calculer un produit scalaire

Exercice d'application

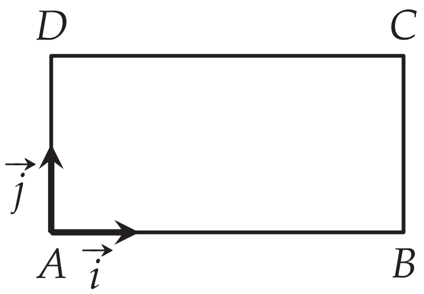
On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB = 4$ et $AC = 2$.



Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction

On introduit $\vec{i} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ de sorte que le repère $\left(A\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$ soit orthonormé et respecte les longueurs données par l'énoncé.



On a alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 4 + 0 \times 2 = 16.$$

3. Propriétés algébriques

La formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ permet de démontrer facilement les propriétés algébriques suivantes.

PROPRIÉTÉ

- Le produit scalaire est **distributif** par rapport à l'addition : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Pour deux réels k et k' : $(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}$.
  En particulier $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v}$.

PREUVE

- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.
  On a alors $\vec{v} + \vec{w}\begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix}$ puis :
  $$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy'' = xx' + yy' + xx'' + yy'' \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.\end{aligned}$$
- Voir exercice 30

30 Démonstration d'une propriété algébrique

Prérequis. On supposera connue la propriété suivante.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé.

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Question. Montrer que, pour tous réels k et k', et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :

$$(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = (k \times k')\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

REMARQUES :

- Le produit scalaire est également distributif par rapport à la soustraction puisque :
  $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} + (-\vec{w})) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot (-\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + (-\vec{u} \cdot \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- Plus largement, $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{z}) = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{z} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{z}$.

Exemple Soit A, B, C et D quatre points du plan. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

Correction

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$
d'après la relation de Chasles.

PROPRIÉTÉ : Identités remarquables

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

PREUVE Démontrons le premier point :

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) \\
&= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} \text{ par distributivité} \\
&= \vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 \text{ par commutativité} \\
&= \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2.
\end{aligned}$$

THÉORÈME : **Application : Théorème de la médiane**

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$.

Pour tout M du plan, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

PREUVE On se référera à l'activité "prochains chapitres"

4. Autres expressions du produit scalaire

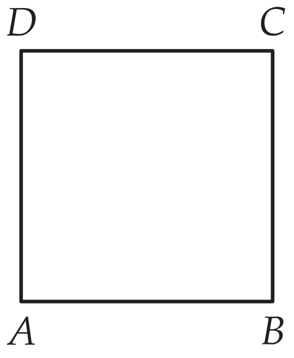
PROPRIÉTÉ

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et trois points A, B et C distincts du plan :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$;
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

Exemple

On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 3.



Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction

On exprime d'abord ce produit scalaire en fonction de représentants des vecteurs de même origine A.

En effet, on sait que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, il en résulte donc que :

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AD \times AC \times \cos\left(\widehat{DAC}\right)$.

Comme, de plus, $AD = 3$, $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ et

$\cos\left(\widehat{DAC}\right) = \cos(45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, on en déduit que :

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}^2}{2} = 9.$$

MÉTHODE 3 Déterminer un angle avec le produit scalaire

Exercice d'application

Dans un repère orthonormé, on considère $A(0\,;\,0)$, $B(5\,;\,1)$ et $C(2\,;\,4)$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC.

2) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

   On donnera le résultat en degrés, arrondi à 0,1 près.

Correction

1) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 2 + 1 \times 4 = 14$
- $AB = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
- $AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

2) De $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$, on déduit que

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{14}{\sqrt{26} \times 2\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{130}}.$$

La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 52,1^\circ$.

Remarque : Plus généralement, le produit scalaire et la relation de Chasles permettent de montrer le **théorème d'Al-Kashi** qui donne des relations entre les longueurs des côtés et les mesures des angles d'un triangle

PROPRIÉTÉ

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens ;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés.

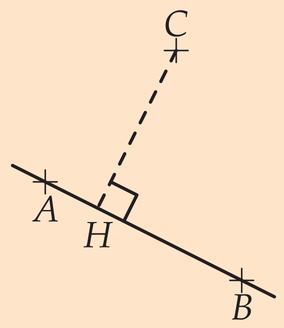
PREUVE

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, alors $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos(0) = 1$ donc :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times 1 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens opposés, alors $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos(\pi) = -1$ donc :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times (-1) = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

DÉFINITION

Dans le plan, on considère une droite (AB) et un point C extérieur à cette droite.

H le **projeté orthogonal** de C sur la droite (AB) est l'intersection de (AB) et de la perpendiculaire à (AB) passant par C.



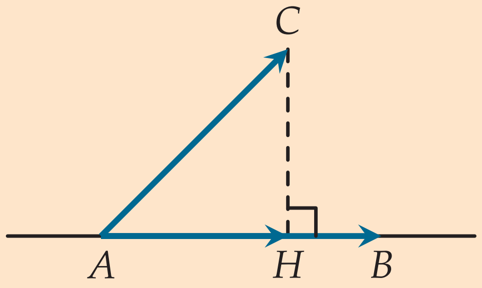
PROPRIÉTÉ

Soit A, B et C trois points distincts du plan et H est le projeté orthogonal de C sur (AB).
On a alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}.$$

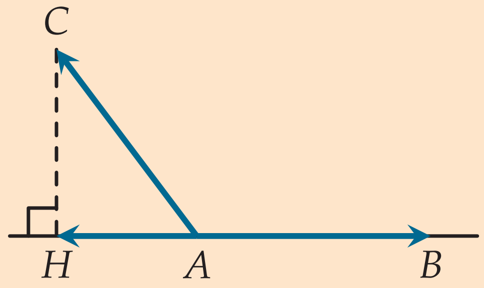
Plus précisément, si $H \neq A$, il y a deux configurations possibles :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens opposés :

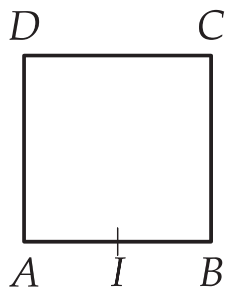


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$

PREUVE D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$ donc :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$
puisque, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ étant orthogonaux par définition de H, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

Exemple

On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 2 et I le milieu de $[AB]$.



Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI}$

Correction

- B est le projeté orthogonal de C sur (AB) donc :

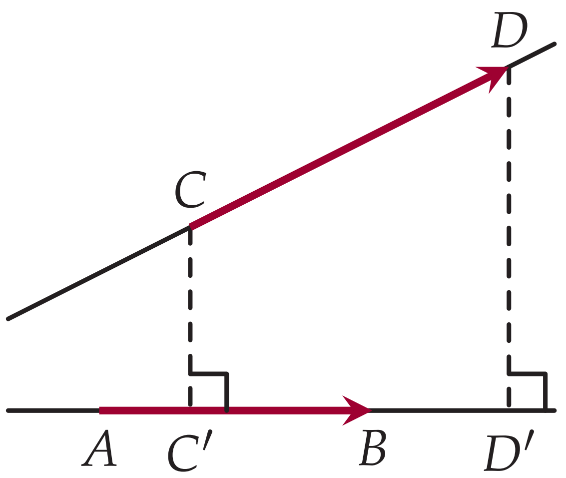
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 2^2 = 4.$$

- $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$ et B est le projeté orthogonal de C sur (IA) donc :

$$\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -IA \times IB = -1^2 = -1.$$

REMARQUE :

Soit C et D deux points distincts, extérieurs à une droite (AB).

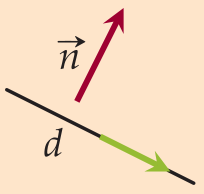


$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$, où C' et D' sont les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur (AB).

5. Vecteur normal à une droite

DÉFINITION

Dans le plan, on dit qu'un vecteur non nul $\vec{n}$ est **normal** à une droite d s'il est orthogonal à un vecteur directeur de d.
$\vec{n}$ est alors orthogonal à tout vecteur directeur de d.



PROPRIÉTÉ

On se place dans un repère orthonormé du plan et on considère deux réels a et b non tous les deux nuls.

- La droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.
- Réciproquement, une droite admettant $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal a pour équation $ax + by + c = 0$ (où c est à déterminer).

PREUVE

- Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et d d'équation $ax+by+c=0$. On sait que d admet $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur or $\vec{u}\cdot\vec{n} = -b\times a + a\times b = -ba+ab = 0$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$, vecteur directeur de d : $\vec{n}$ est un vecteur normal à d.
- Soit une droite d admettant $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal et $A(x_A;y_A)$ un point de d.

  Un point $M(x;y)$ appartient à d si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

  Comme $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $M\in d \Leftrightarrow (x-x_A)a+(y-y_A)b=0$

  $\Leftrightarrow ax+by+(-ax_A-by_A)=0$: la droite d a bien une équation de la forme $ax+by+c=0$.

Exemple

Donner un vecteur normal à la droite d d'équation $2x-3y+5=0$ dans un repère orthonormé.

Correction

$2x-3y+5=0$ est de la forme $ax+by+c=0$ avec $a=2$ et $b=-3$ donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est normal à d.

MÉTHODE 4 Trouver une équation de droite avec un vecteur normal

Exercice d'application

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(2\,;\,-4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$.

Correction Il y a deux façons de procéder.

- Comme $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ est normal à d, elle a pour équation $5x+6y+c=0$ où c reste à déterminer.
  De plus, $A \in d$ donc $5x_A+6y_A+c=0 \Leftrightarrow 5\times 2+6\times(-4)+c=0 \Leftrightarrow -14+c=0$
  $\Leftrightarrow c=14$: la droite d a donc pour équation $5x+6y+14=0$.
- $M(x\,;\,y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow (x-2)\times 5+(y+4)\times 6=0 \Leftrightarrow 5x+6y+14=0$.