1. Fonction dérivée

DÉFINITION

Si, pour tout réel $a \in I$, $f'(a)$ existe, on dit que f est dérivable sur I.
On définit alors une nouvelle fonction f' sur I par :

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

PROPRIÉTÉ : **Dérivées des fonctions usuelles**

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$]0\,;\,+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

PREUVE

- Soit $f : x \mapsto mx + p$. Voir exercice
- Soit $f : x \mapsto x^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, on a :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 2x.$$

- Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \in \mathbb{R}^\star$, on a :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{-\dfrac{h}{x(x+h)}}{h} = -\frac{1}{x(x+h)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{x^2}.$$

- Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \in]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

PROPRIÉTÉ : Dérivation : somme et produit par une constante

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- La fonction $u+v : x \mapsto u(x)+v(x)$ est dérivable sur I et on a $(u+v)' = u'+v'$.
- La fonction $ku : x \mapsto ku(x)$ est dérivable sur I et on a $(ku)' = ku'$.

PREUVE Soit $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$. Alors :

- $\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} u'(a)+v'(a)$.
- Le deuxième point se traite facilement.

Exemple

1) $f : x \mapsto \sqrt{x} + x^5$ est de la forme $u+v$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^5$. Ainsi :

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5x^4.$$

2) $f : x \mapsto 8x^5$ est de la forme ku avec $k = 8$ et $u(x) = x^5$. Ainsi :

$$f'(x) = ku'(x) = 8 \times 5x^4 = 40x^4.$$

PROPRIÉTÉ : **Dérivation : produit**

- La fonction $uv : x \mapsto u(x)v(x)$ est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v + uv'$.

PREUVE Soit $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$. Alors :

- $$\begin{aligned}\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)\overbrace{+u(a)v(a+h) - u(a)v(a+h)}^{\text{On ajoute et retranche la même quantité}}}{h} \\ &= \frac{u(a+h)) - u(a)}{h}v(a+h) + u(a)\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \\ &\underset{h\to 0}{\to} u'(a)v(a) + u(a)v'(a).\end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ : Dérivation : inverse et quotient

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I telles que v ne s'annule pas sur I.

Alors :

- La fonction $\dfrac{1}{v} : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
- La fonction $\dfrac{u}{v} : x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

PREUVE Voir exercice **51** Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I telles que v ne s'annule pas sur I.

1) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$.

a) Soit $x \in I$. Démontrer que :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{v(x) - v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}.$$

b) En déduire $f'(x)$.

2) Soit $g : x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

En écrivant $g(x)$ comme un produit et en utilisant les propriétés de dérivation déjà établies, déterminer $g'(x)$.

MÉTHODE 1 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

1) On commence par identifier la forme de la fonction f (somme, produit, inverse, quotient de fonctions usuelles).
2) On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité.
3) On dérive séparément chacune des fonctions composant f.
4) On calcule $f'(x)$ en appliquant les formules de dérivation du cours.

Exercice d'application Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + 5$
2) $g(x) = x\sqrt{x}$
3) $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$
4) $i(x) = \dfrac{x-3}{2x+4}$

Correction

1) f est de la forme $u+v+w$ (somme) avec $u(x)=7x^3$, $v(x)=-2x^2$ et $w(x)=5$.
Ces trois fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour f.
De plus, $u'(x)=7\times(3x^2)=21x^2$, $v'(x)=-2\times(2x)=-4x$ et $w'(x)=0$.
Ainsi, pour tout réel x :

$$f'(x)=21x^2-4x.$$

2) g est de la forme uv (produit) avec $u(x)=x$ et $v(x)=\sqrt{x}$. Ces deux fonctions sont définies sur $[0\,;\,+\infty[$ et dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, il en est de même pour g.
De plus, $u'(x)=1$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, pour tout $x>0$:

$$g'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{3\sqrt{x}}{2}.$$

3) h est de la forme $\frac{1}{v}$ (inverse) avec $v(x) = x^2 + 1$. v est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais donc h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, $v'(x) = 2x$. Ainsi, pour tout réel x :

$$h'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

4) i est de la forme $\frac{u}{v}$ (quotient) avec $u(x) = x - 3$ et $v(x) = 2x + 4$. Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ mais v s'annule en -2. Donc i est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
De plus, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2$. Ainsi, pour tout $x \neq -2$:

$$i'(x) = \frac{1 \times (2x+4) - (x-3) \times 2}{(2x+4)^2} = \frac{10}{(2x+4)^2}.$$