PROPRIÉTÉ : Du signe de $f'(x)$ au sens de variation de f

1) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
2) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
3) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

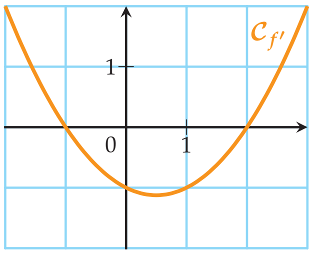
MÉTHODE 1 Déterminer les variations d'une fonction

1) On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité de f puis on calcule $f'(x)$.
2) On étudie le signe de $f'(x)$.
3) On en déduit les variations de f et on résume le tout dans un tableau.

Exercice d'application Déterminer les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - x.$$

Correction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 1$. f' est une fonction polynôme du second degré et ses racines sont -1 et 2. Comme $a > 0$, on a alors :



D'où le signe de $f'(x)$ et les variations de f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	$\frac{7}{12}$	↘	$-\frac{5}{3}$	↗	

Pour compléter le tableau, on calcule :

- $f(-1) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{-2-3+12}{12} = \frac{7}{12}$
- $f(2) = \frac{8}{6} - 1 - 2 = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$

DÉFINITION : Extremum

1) On dit que f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en a s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant a tel que, pour tout $x \in J$: $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

2) Dire qu'une fonction admet un **extremum local** signifie que f admet un maximum local ou un minimum local.

PROPRIÉTÉ : Caractérisation d'un extremum

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
Si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum local en a.

MÉTHODE 2 Faire le lien entre extrema et dérivée

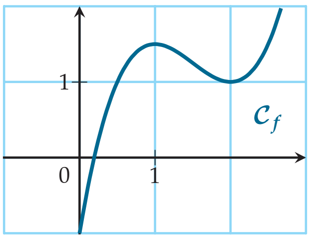
1) On repère les extrema locaux de f en lesquels f' doit s'annuler en changeant de signe.

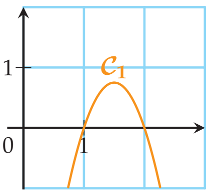
2) On repère la nature de chaque extremum :

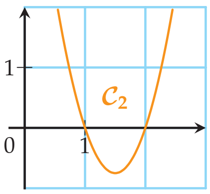
- **a)** si c'est un maximum, la dérivée doit être positive « avant » et négative « après » ;
- **b)** si c'est un minimum, la dérivée doit être négative « avant » et positive « après ».

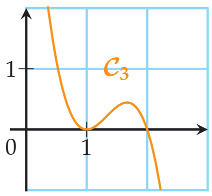
Exercice d'application

On considère une fonction f dont on donne la représentation graphique ci-contre.
Parmi les courbes ci-dessous, laquelle est susceptible de représenter f' ?









Correction f possède deux extrema locaux en $x = 1$ et $x = 2$. La dérivée doit donc s'annuler en changeant de signe en $x = 1$ et $x = 2$: on peut donc éliminer $\mathcal{C}_3$ car la fonction associée à cette courbe ne change pas de signe en $x = 1$.
En $x = 1$, l'extremum est un maximum donc $f'(x)$ doit être positive « avant 1 » , s'annuler en 1 puis être négative « après 1 » : seule la courbe $\mathcal{C}_2$ convient.
On peut vérifier avec l'autre extremum : en $x = 2$ on a un minimum et la fonction associée à la courbe $\mathcal{C}_2$ est bien négative « avant 2 » et positive « après 2 ».