1. Modes de génération d'une suite ; représentation graphique

DÉFINITION : Suite numérique

Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
L'image de l'entier n par la suite est notée u_n. On l'appelle **terme d'indice** n de la suite.
Cette suite est notée (u_n) ou encore u.

NOTATION : $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers positifs, appelés entiers naturels.

Exemple Voici la suite des nombres impairs : $u_0 = 1$; $u_1 = 3$; $u_2 = 5$; $u_3 = 7\ldots$
Le terme d'indice 0 de la suite u est 1, celui d'indice 1 est 3…

REMARQUE : Le mode de génération d'une suite est la façon dont cette suite est définie.

DÉFINITION : Suite définie de façon explicite

Définir une suite par une **formule explicite**, c'est exprimer chaque terme de la suite en fonction de n.

REMARQUE : Cela signifie que l'on peut calculer un terme de la suite sans connaître les termes précédents.

MÉTHODE 1 Étudier une suite définie de façon explicite

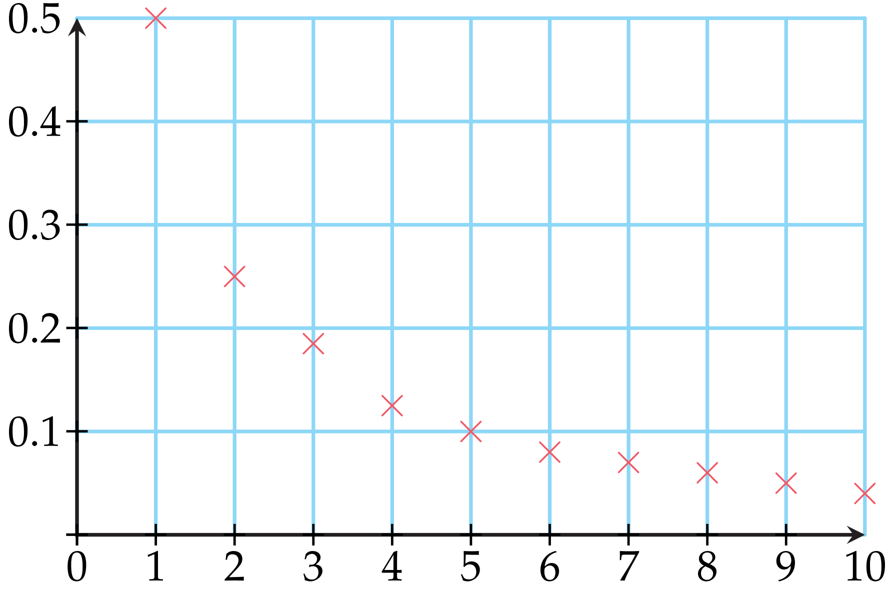
- Vérifier s'il existe des valeurs de n pour lesquelles u_n n'est pas défini.
- Calculer les termes de la suite en remplaçant n par sa valeur dans l'expression $f(n)$ donnée.
- Représenter les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$ qui sont les points d'abscisse positive de la courbe C de f.

Exercice d'application

Calculer, puis représenter les dix premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.

Correction

On remarque que cette suite n'est pas définie pour $n = 0$.



n	u_n
1	1,00
2	0,50
3	0,33
4	0,25
5	0,20
6	0,17
7	0,14
8	0,13
9	0,11
10	0,10

DÉFINITION : Suite définie par une relation de récurrence

Définir **une suite par une relation de récurrence**, c'est donner le premier terme de la suite et une méthode de calcul de u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n.

REMARQUE : On ne peut alors calculer un terme que si l'on connaît le précédent, il faut calculer de proche en proche tous les termes à partir du premier.

REMARQUE : Une relation de récurrence peut aussi faire intervenir plusieurs des termes précédents, par exemple la célèbre suite de Fibonacci $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Pour définir la suite, la donnée du premier terme ne suffit pas, il faut en donner plusieurs. Ici par exemple $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

MÉTHODE 3 Étudier une suite définie par récurrence

Algébriquement

On calcule les termes de proche en proche à partir du premier et d'une expression de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

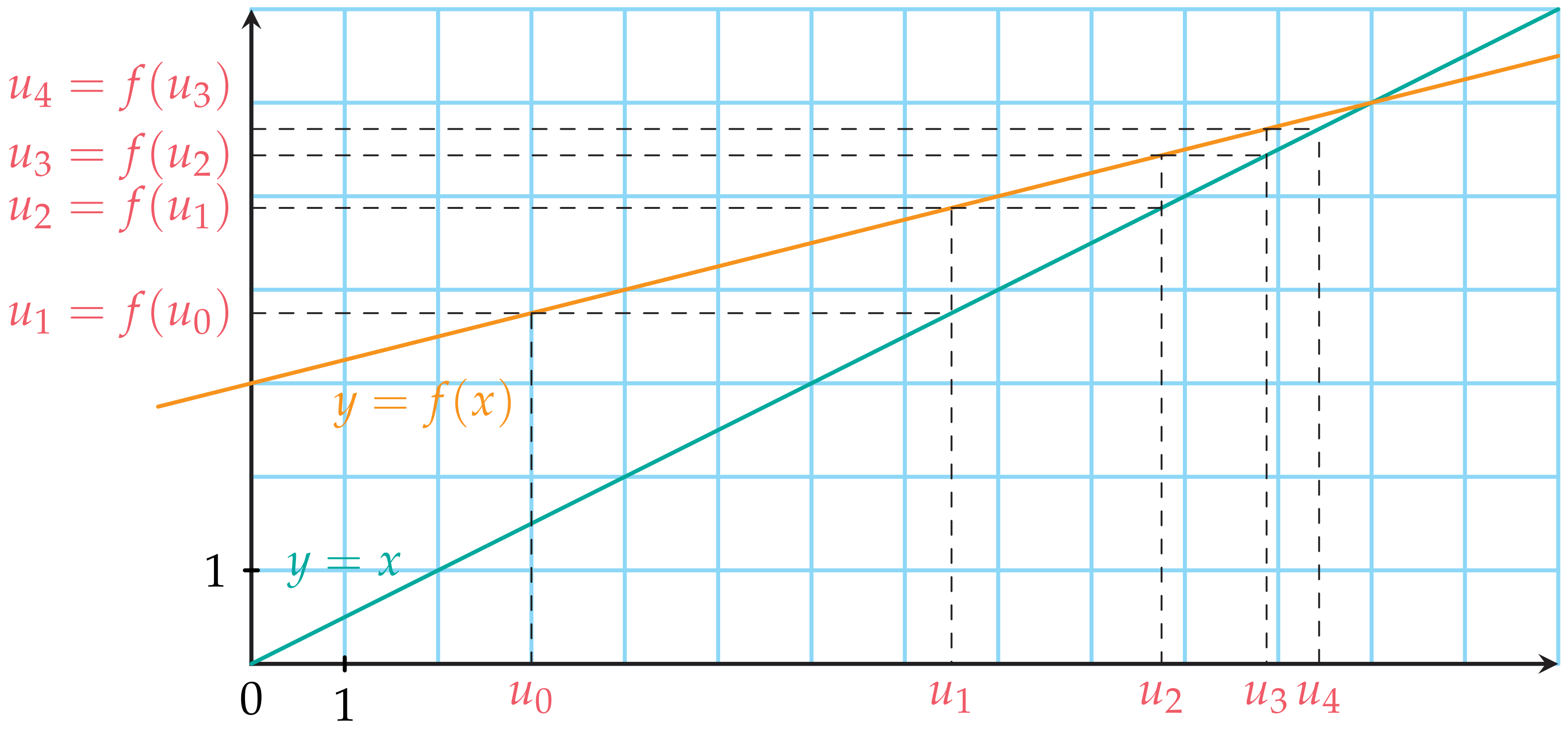
Graphiquement

- Construire la courbe représentant f.
- Construire la droite d'équation $y = x$.
- Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
- Construire son image u_1.
- La reporter sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$.
- Construire de la même façon u_2 puis u_3...

Correction

1) Pour calculer u_3, il faut calculer u_1, u_2 puis u_3 : $u_1 = 7$; $u_2 = \dfrac{19}{2}$; $u_3 = \dfrac{43}{4}$.

2)



2. Sens de variations

DÉFINITION

On dit qu'une suite u est **croissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.
On dit qu'une suite u est **décroissante** si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.
On dit qu'une suite u est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

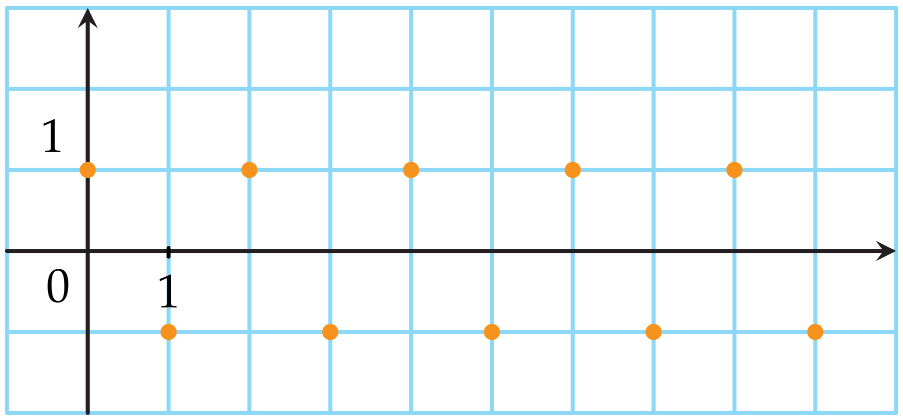
REMARQUES :

- On définit de même une suite strictement monotone en utilisant des inégalités strictes.
- Une suite peut être monotone à partir d'un terme (voir 2^{e} exemple).

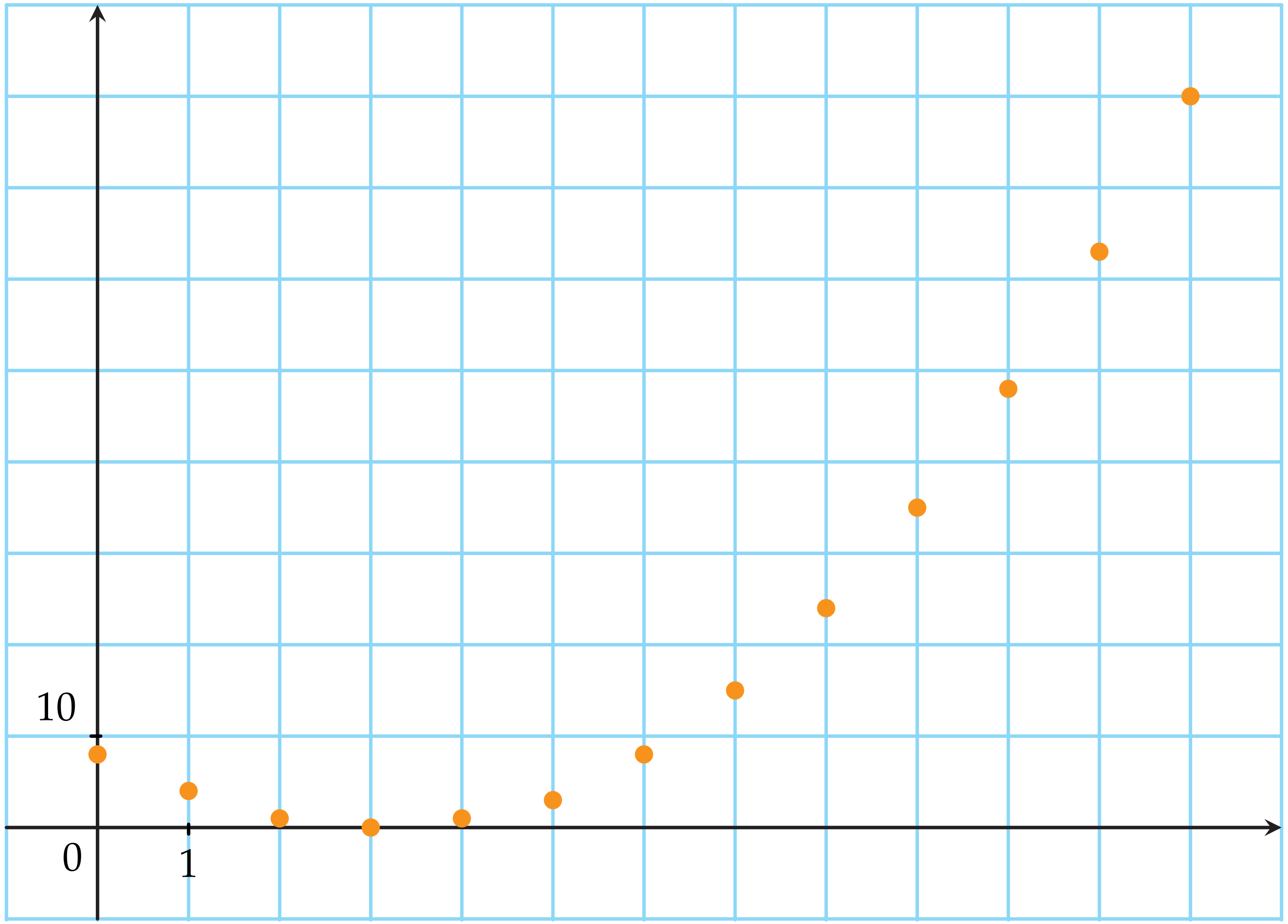
Exemples

- La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante.

  Les termes d'indice pair sont égaux à 1 et les termes d'indice impair sont égaux à -1.



- La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 6n + 9$ est croissante à partir de l'indice 3.



MÉTHODE 1 Montrer qu'une suite est monotone par différence de termes

On calcule la différence $u_{n+1} - u_n$ puis on regarde son signe :

- si cette différence est positive, alors la suite est croissante ;
- si cette différence est négative, alors la suite est décroissante ;
- si cette différence change de signe, alors la suite n'est pas monotone.

Exercice d'application

Étudier la monotonie de la suite v définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = n^2 - 8n + 18.$$

Correction

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)^2 - 8(n+1) + 18 - \left(n^2 - 8n + 18\right) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 8n - 8 + 18 - n^2 + 8n - 18 \\ &= 2n - 7. \end{aligned}$$

Or $2n - 7 \geq 0$ pour $n \geq 3,5$ donc pour $n \geq 4$:
$v_{n+1} - v_n \geq 0$, c'est-à-dire $v_{n+1} \geq v_n$.
La suite n'est pas monotone, cependant elle est croissante à partir du terme d'indice 4.

MÉTHODE 2 Montrer qu'une suite est monotone par quotient de deux termes

Pour une suite à termes strictement positifs, on calcule le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ puis on compare avec la valeur 1 :

- si ce quotient est supérieur à 1, alors la suite est croissante ;
- si ce quotient est inférieur à 1, alors la suite est décroissante ;
- si cela dépend des valeurs de n, alors la suite n'est pas monotone.

Exercice d'application

Étudier la monotonie de la suite w définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = \frac{1}{3^n}.$$

Correction

Pour tout entier naturel n positif, les termes de la suite sont strictement positifs.

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{3^n}{3^n + 1} = \frac{3^n}{3^n \times 1} = \frac{1}{3} < 1.$$

Donc pour tout entier naturel n, $w_{n+1} \leq w_n$.

La suite w est donc décroissante.

PROPRIÉTÉ : Cas d'une suite définie par $u_n = f(n)$

La suite u est définie par $u_n = f(n)$, avec f définie sur $[0\,;\,+\infty[$.
Si f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite u est croissante.
Si f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$, alors la suite u est décroissante.

REMARQUE : On prouve de même une stricte monotonie en utilisant la stricte monotonie de f.

MÉTHODE 3 Montrer qu'une suite est monotone par l'étude d'une fonction

Si u est définie pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$, alors on étudie les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Exercice d'application

Étudier la monotonie de la suite u définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = -\frac{1}{n}$$

Correction

On s'intéresse à la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$.

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et u est croissante.