1. Répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire

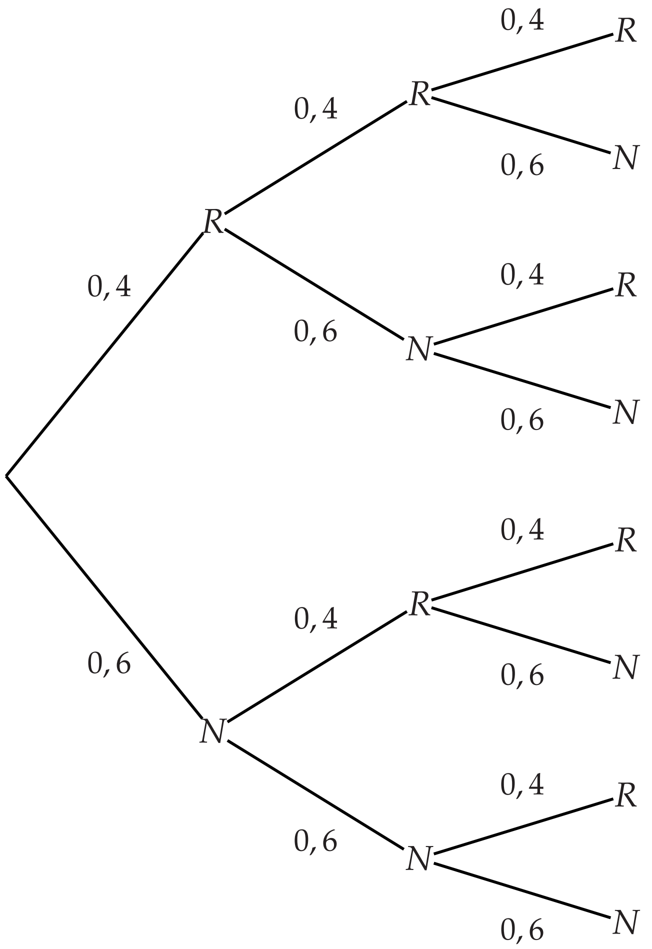
On considère le cadre suivant : on répète n fois de suite, de manière **identique** et de façon **indépendante** la même expérience aléatoire.

Exemple On dispose d'une urne contenant 100 boules : 40 boules rouges et 60 boules noires.

On effectue trois tirages successifs avec remise dans cette urne en notant à chaque fois la couleur de la boule obtenue.
Comme ce sont des tirages avec remise :

- à chaque tirage, les conditions sont identiques (il y a 100 boules dans l'urne : 40 boules rouges et 60 boules noires) ;
- les tirages sont indépendants (le résultat d'un tirage n'influence pas le suivant).

À chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule rouge est de $\frac{40}{100} = 0,4$ et la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{60}{100} = 0,6$ donc on peut représenter la situation par l'arbre pondéré ci-contre.



PROPRIÉTÉ

Les règles d'utilisation principales des arbres pondérés sont :

- chaque chemin de l'arbre correspond à un résultat dont la probabilité est le produit des probabilités inscrites sur les branches qui constituent le chemin ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités associées aux chemins qui permettent de réaliser l'événement.

Exemple En utilisant l'arbre précédent, déterminer :

1) La probabilité d'obtenir trois boules rouges.
2) La probabilité d'obtenir, **dans cet ordre**, une boule noire, une boule rouge et une boule noire.
3) La probabilité d'obtenir, au bout des trois tirages, deux boules rouges et une boule noire.

Correction

1) La probabilité d'obtenir trois boules rouges est de $0,4 \times 0,4 \times 0,4 = 0,064$.
2) La probabilité d'obtenir, **dans cet ordre**, une boule noire, une boule rouge et une boule noire, est de $0,6 \times 0,4 \times 0,6 = 0,144$.
3) La probabilité d'obtenir, au bout des trois tirages, deux boules rouges et une boule noire est $0,4 \times 0,4 \times 0,6 + 0,4 \times 0,6 \times 0,4 + 0,6 \times 0,4 \times 0,4 = 3 \times 0,4^2 \times 0,6 = 0,288$.

2. Loi de Bernoulli

DÉFINITION

- On dit qu'une expérience aléatoire à deux issues est une **épreuve de Bernoulli**.
  Par convention, une des deux issues, de probabilité p avec $0 < p < 1$, est appelée **succès** (notée S) et l'autre est appelée échec (notée $\overline{S}$).

Issue	S	$\overline{S}$
Probabilité	p	$1 - p$

- On dit que la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec suit la **loi de Bernoulli de paramètre** p.

Exemple Dans l'exemple introductif de la **partie 1**, le tirage d'une boule de l'urne est une épreuve de Bernoulli car il y a deux issues, avec $p = 0{,}4$ en prenant « Rouge » comme succès.

REMARQUE : Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On a :

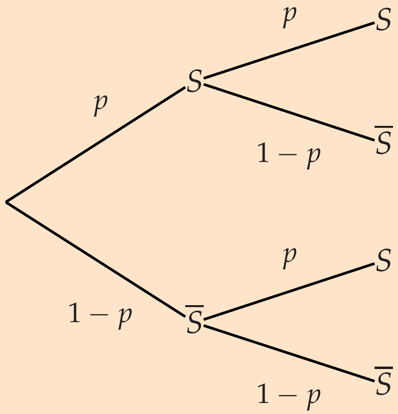
- $E(X) = p$
- $V(X) = p(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

3. Schéma de Bernoulli et coefficient binomial

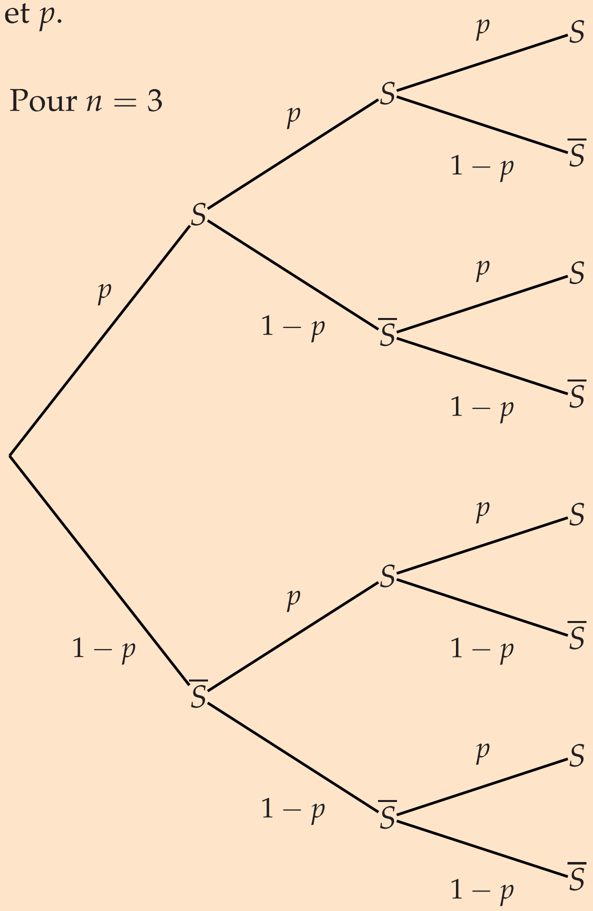
DÉFINITION

On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p.
La répétition n fois (où $n \in \mathbb{N}^*$), de façon indépendante, de cette épreuve de Bernoulli est appelée **schéma de Bernoulli** de paramètres n et p.

Pour $n = 2$



Pour $n = 3$



Exemple Dans l'exemple introductif de la **partie 1**, comme les tirages sont indépendants (puisqu'avec remise), on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}4$ (en prenant « Rouge » comme succès).

DÉFINITION

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et un entier k avec $0 \leqslant k \leqslant n$.

L'entier $\binom{n}{k}$, appelé **coefficient binomial** et se lisant « k parmi n », désigne le nombre de chemins de l'arbre correspondant à k succès.

Exemple Dans l'exemple introductif de la **partie 1**, on a un schéma de Bernoulli avec $n = 3$: comme il y a 3 chemins qui mènent à 1 succès (c'est-à-dire « obtenir une boule rouge »), on a $\binom{3}{1} = 3$.

Remarque : Par convention, on pose $\binom{0}{0} = 1$.

MÉTHODE 1 Obtenir un coefficient binomial avec la calculatrice

Exercice d'application

Déterminer $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ avec la calculatrice.

Correction

Calculatrice TI

On saisit `7 Combinaison 3`

où `Combinaison` s'obtient en :

- appuyant sur la touche math
- choisissant **PRB**
- choisissant **3 :Combinaison**

On obtient $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 35.$

Calculatrice CASIO

On saisit `7C3`

où `C` s'obtient en :

- appuyant sur la touche OPTN
- choisissant ▷ puis PROB
- choisissant nCr

PROPRIÉTÉ

Soit n et k des entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

- $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ et $\begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1$
- $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$

PREUVE Pour le dernier point, $\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$ est le nombre de chemins correspondant à $k+1$ succès dans un arbre représentant un schéma de Bernoulli de $n+1$ épreuves.

- Si la première épreuve donne un succès, il faut alors encore k succès sur les n épreuves restantes, ce qui donne donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ chemins.
- Si la première épreuve donne un échec, il faut alors encore $k+1$ succès sur les n épreuves restantes, ce qui donne donc $\begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$ chemins.

Il y a donc bien $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$ chemins qui correspondent à $k+1$ succès pour $n+1$ épreuves.

Remarque : Le tableau suivant donnant tous les coefficients binomiaux est appelé « **Triangle de Pascal** ».

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
...							

- Comme $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$, il y a des 1 dans la première colonne et la diagonale.
- Comme $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, on peut remplir chaque ligne à partir de la précédente, par exemple, on a $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$ d'où $6 + 4 = 10$.
- On observe sur ce triangle que $\binom{n}{1} = n$.

4. Loi binomiale

DÉFINITION

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
On dit que la variable aléatoire X donnant le nombre de succès obtenus sur les n épreuves suit la **loi binomiale de paramètres** n **et** p, notée $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Exemple Dans l'exemple introductif de la **partie 1** , on note X le nombre de boules rouges obtenues après les trois tirages.
Comme on a un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$ (puisque « Rouge » correspond à un succès), X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,4$.

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$. On a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

PREUVE Quand on considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p, on trouve sur chaque chemin qui correspond à k succès :

- la probabilité p sur k branches
- la probabilité $1-p$ sur $n-k$ branches

donc la probabilité correspondant à chacun de ces chemins est $p^k \times (1-p)^{n-k}$.

Comme il y $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ chemins, on a $P(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$.

Exemple Soit X suivant la loi $\mathscr{B}(4\,;\,0{,}3)$.

On a $P(X=3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} 0{,}3^3(1-0{,}3)^{4-3} = 4 \times 0{,}3^3 \times 0{,}7 = 0,0756$.

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

REMARQUE : La première propriété se « devine » de la façon suivante : pour une épreuve de Bernoulli, l'espérance d'un succès est p.
Pour une répétition de n épreuves de Bernoulli, l'espérance du nombre de succès est $n \times p$.

MÉTHODE 2 Déterminer une probabilité $P(X = k)$ à l'aide de la calculatrice

La calculatrice permet d'obtenir directement $P(X = k)$ où X suit la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Exercice d'application

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,2$.
Déterminer $P(X = 1)$ à l'aide de la calculatrice.

Correction

Calculatrice TI

- On accède au menu **distrib** en appuyant sur la touche 2nde puis la touche var
- On choisit `0:binomFdp(` puis on entre dans l'ordre la valeur des paramètres n, p et k séparés par des virgules pour obtenir

```
binomFdp(6,0.2,1
)
                .393216
```

Calculatrice Casio

- Dans le menu **RUN**, on appuye sur OPTN puis ▷ puis **STAT** puis **DIST** puis **BINM** puis **Bpd**.
- On saisit dans l'ordre la valeur des paramètres k, n et p séparés par des virgules pour obtenir

```
BinominalPD(1,6,0.2)
              0.393216
```

On trouve ainsi $P(X = 1) \approx 0,393$.

MÉTHODE 3 Déterminer une probabilité $P(X \leqslant k)$ à l'aide de la calculatrice

La calculatrice permet d'obtenir directement $P(X \leqslant k)$ où X suit la loi $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

Exercice d'application

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = 0,6$.
Déterminer $P(X \leqslant 5)$ à l'aide de la calculatrice.

Correction

Calculatrice TI

- On accède au menu **distrib** en appuyant sur la touche 2nde puis la touche var
- On choisit `A:binomFRép(` puis on entre dans l'ordre la valeur des paramètres n, p et k séparés par des virgules pour obtenir

```
binomFRép(7,0.6,
5)
            .8413696
```

Calculatrice Casio

- Dans le menu **RUN**, on appuye sur OPTN puis ▷ puis **STAT** puis **DIST** puis **BINM** puis **Bcd**.
- On saisit dans l'ordre la valeur des paramètres k, n et p séparés par des virgules pour obtenir

```
BinomialCD(5,7,0.6)
          0.8413696
```

On trouve ainsi $P(X \leqslant 5) \approx 0,841$.