1. Les suites arithmétiques

DÉFINITION

On dit qu'une **suite** (u_n) **est arithmétique**, s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel, on a $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé la **raison** de la suite arithmétique (u_n).

REMARQUE : Une suite arithmétique est définie par une relation de récurrence ; on ajoute toujours le même terme. Pour la définir, il faut donner son premier terme et sa raison.

Exemple La suite définie par $\begin{cases} u_3 = 4 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ pour $n \geq 3$ est une suite arithmétique de raison -5.

MÉTHODE 5 Démontrer qu'une suite est arithmétique

Pour tout entier appartenant à $\mathbb{N}$, on calcule la différence $u_{n+1} - u_n$.
On montre que cette différence est constante.

Exercice d'application

Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2 + 3n$ est arithmétique.

Correction

Pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 + 3(n+1) - (2+3n) \\ &= 2 + 3n + 3 - 2 - 3n \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3.

MÉTHODE 6 Démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique

On utilise un contre-exemple pour prouver qu'une suite n'est pas arithmétique.
On calcule deux différences de termes consécutifs et on montre qu'elles ne sont pas égales.

Exercice d'application

La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n \end{cases}$ pour $n \geq 0$ est-elle une suite arithmétique ?

Correction

On calcule les trois premiers termes, par exemple :
$u_0 = 0 \quad u_1 = u_0 + 2 \times 0 = 0 \quad u_2 = u_1 + 2 \times 1 = 2$
Puis on calcule les différences :
$u_1 - u_0 = 0$ et $u_2 - u_1 = 2$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.
La suite (u_n) n'est pas arithmétique.

THÉORÈME : Forme explicite d'une suite arithmétique

- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n = u_0 + nr.$$
- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tous les entiers naturels n et k, on a :
$$u_n = u_k + (n-k)\,r.$$

PREUVE

- Par définition, on sait que pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_n + r$.

Donc $\begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ u_3 = u_2 + r \\ \quad \dots \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases}$.

On ajoute alors membre à membre et on obtient :
$$u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + nr.$$
On retranche de chaque côté le terme $u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ et on obtient $u_n = u_0 + nr$.

- Soient deux nombres entiers naturels n et k. En écrivant la propriété précédente pour k, on obtient :
$$u_k = u_0 + kr \text{ , soit } u_0 = u_k - kr \tag{1}$$
D'autre part : $u_n = u_0 + nr$ donc en utilisant l'égalité **(1)** :
$u_n = u_k - kr + nr$ donc $u_n = u_k + (n-k)r$.

MÉTHODE 7 Déterminer la forme explicite d'une suite arithmétique

Exercice d'application

1) Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison -4. Déterminer sa forme explicite.

2) Soit la suite arithmétique (v_n) de raison 5 et telle que $v_{10} = 7$. Déterminer sa forme explicite.

Correction

1) Pour tout entier naturel n, $u_n = 3 - 4_n$.

2) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_{10} + (n - 10)r \Leftrightarrow v_n = 7 + 5(n - 10) = 5n - 43$.

PROPRIÉTÉ

La somme des n premiers entiers naturels est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

PREUVE On peut exprimer la somme des n premiers entiers naturels de deux manières :

$$\begin{array}{rcll} S & = & 1+2 & +\ldots+n \\ S & = & n+(n-1) & +\ldots+1 \\ \hline 2S & = & (n+1)+(n+1) & +\ldots+(n+1) \end{array}$$

On additionne les deux égalités.

Puis on obtient $2S = n\,(n+1)$ d'où le résultat $S = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

NOTATION : La somme de $k=0$ à n des u_k se note $S = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Ainsi, la propriété précédente peut s'écrire $\sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Les suites géométriques

DÉFINITION

On dit qu'une **suite** (u_n) **est géométrique** s'il existe un réel q non nul tel que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = u_n \times q = qu_n$.
Le réel q est appelé la **raison** de la suite géométrique (u_n).

REMARQUE : Une suite géométrique est définie par récurrence ; on multiplie toujours par le même terme. Pour définir une suite géométrique, il faut donner son premier terme et sa raison.

Exemples

- La suite des puissances de 10 est géométrique de raison 10.
- La suite définie par $u_n = (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ est géométrique de raison -1. Elle ne prend que les valeurs -1 et 1.

MÉTHODE 8 Démontrer qu'une suite est géométrique

On calcule le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et on montre qu'il est égal à une constante.

Exercice d'application

Montrer que la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^{2n}}$ est géométrique.

Correction

Pour tout entier n de $\mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+2}}{3^{2(n+1)}}}{\dfrac{2^{n+1}}{3^{2n}}} = \frac{2^{n+2}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{2^{n+2-n-1}}{3^{2n+2-2n}} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{9}$.

MÉTHODE 9 Démontrer qu'une suite n'est pas géométrique

On utilise un contre-exemple pour démontrer qu'une suite n'est pas géométrique.
On calcule deux quotients de termes consécutifs et on montre qu'ils ne sont pas égaux.

Exercice d'application

La suite définie par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n \times 2n \end{cases}$ pour $n \geq 1$ est-elle géométrique ?

Correction

On calcule les trois premiers termes.
$u_1 = 1$, $u_2 = u_1 \times 2 \times 1 = 2$, $u_3 = u_2 \times 2 \times 2 = 8$.
Puis on calcule les quotients :
$\dfrac{u_2}{u_1} = 2$ et $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{8}{2} = 4$ donc $\dfrac{u_3}{u_2} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$.
On en déduit que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

THÉORÈME : Forme explicite d'une suite géométrique

- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tout entier naturel n on a :
$$u_n = u_0 q^n.$$
- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tous entiers naturels n et k on a :
$$u_n = u_k q^{n-k}.$$

PREUVE

- Par définition, on sait que pour tout entier naturel n, on a $u_n = qu_n$.

  Donc $u_1 = qu_0,\ u_2 = qu_1,\ u_3 = qu_2,\ \dots,\ u_n = qu_{n-1}$.

  On multiplie membre à membre et on obtient :
$$u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1} \times u_n = q^n \times u_0 \times u_1 \dots \times u_{n-1}$$
  On divise de chaque côté par le terme $u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1}$ et on obtient $u_n = u_0 \times q^n$.
- Soient deux nombres entiers naturels n et k.

  Comme $q \neq 0$, en écrivant la propriété précédente pour k, on obtient :
$$u_k = u_0 \times q^k \Leftrightarrow u_0 = \frac{u_k}{q^k}. \qquad \mathbf{(1)}$$
  D'autre part, $u_n = u_0 \times q^n$. Donc en utilisant l'égalité (**1**) :
$$u_n = \frac{u_k}{q^k} \times q^n \quad \text{donc} \quad u_n = u_k \times q^{n-k}.$$

MÉTHODE 10 Déterminer la forme explicite d'une suite géométrique

Exercice d'application

1) Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2. Déterminer sa forme explicite.

2) Soit la suite géométrique (u_n) telle que $u_4 = 21$ et de raison 3. Déterminer sa forme explicite.

Correction

1) $u_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$

2) $u_n = u_4 q^{n-4} = 2 \times 3^{n-4}$

PROPRIÉTÉ : Somme des $n+1$ premières puissances d'un réel q non nul et $q \neq 1$

Pour tout réel q non nul et différent de 1, $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + ... + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

PREUVE On écrit la somme des $n+1$ premières puissances d'un réel q non nul et différent de 1 :

$$S = 1 + q + ... + q^n \qquad \textbf{(1)}$$

On multiplie S par q et on obtient

$$qS = q + q^2 + ... + q^{n+1}. \qquad \textbf{(2)}$$

On soustrait membre à membre les équations (**1**) et (**2**), donc on obtient :

$$(1-q)\,S = 1 - q^{n+1}, \text{ c'est-à-dire } S = \frac{1-q^{n+1}}{(1-q)}.$$

PROPRIÉTÉ : Cas d'une suite arithmétique

Soit la suite u arithmétique de raison r non nulle et de premier terme u_0.
Si r est négative, alors la suite u est décroissante.
Si r est positive, alors la suite u est croissante.

PREUVE Soit u une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Par définition, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. Donc $u_{n+1} - u_n = r$.

- Si r est négative, alors, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_n$.
  Dans ce cas, u est décroissante.
- Si r est positive, alors, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_n$.
  Dans ce cas, u est croissante.

PROPRIÉTÉ : Cas d'une suite géométrique

Soit la suite u géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Si $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite u est décroissante.
Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, alors la suite u est croissante.
Si $u_0 < 0$ et $0 < q < 1$, alors la suite u est croissante.
Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, alors la suite u est décroissante.
Si $q < 0$, alors la suite u n'est pas monotone.

PREUVE

- Soit la suite u géométrique de raison q et de premier terme u_0 avec $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$.
  Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$ et $u_n > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q < 1$ donc dans ce cas, u est décroissante.
- L'exercice 53 présente les preuves pour les autres cas.

Exemples

- La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = -2n + 5$ est arithmétique de raison -2. Elle est donc décroissante.
- La suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ est géométrique de raison $0 < \dfrac{1}{3} < 1$ et de premier terme $v_n = -2 < 0$. Elle est donc croissante.

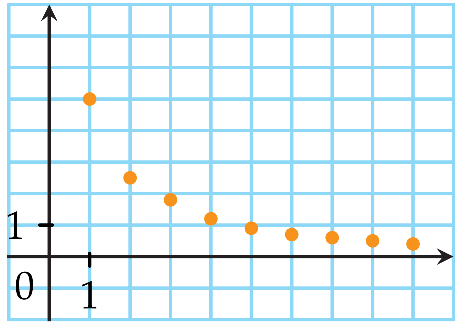
3. Comportement à l'infini

DÉFINITION INTUITIVE : Suite convergente

On dit qu'une suite **converge vers** l lorsque ses termes se rapprochent de plus en plus de l lorsque n devient très grand (cela signifie $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$).

Exemples

- (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel par $u_n = \dfrac{5}{n}$.
- Lorsque n tend vers $+\infty$, u_n tend vers 0 ($u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$).
  On dit que (u_n) converge vers 0.



VOCABULAIRE : Si une suite (u_n) converge vers l, on dit que la suite a pour limite l.**limite**

NOTATION : Si une suite (u_n) converge vers l, on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$
(on lit : « limite quand n tend vers $+\infty$ de u_n égal l »).

DÉFINITION INTUITIVE : Suite divergente

On dit qu'une suite est **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente. Deux cas sont possibles :

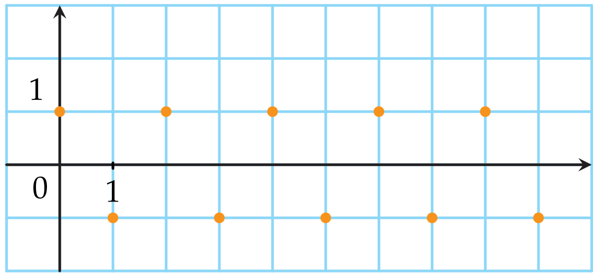
- la suite n'a pas de limite ;
- les termes de la suite tendent vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$).
  On dit alors que la suite a pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$).

NOTATION : On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).

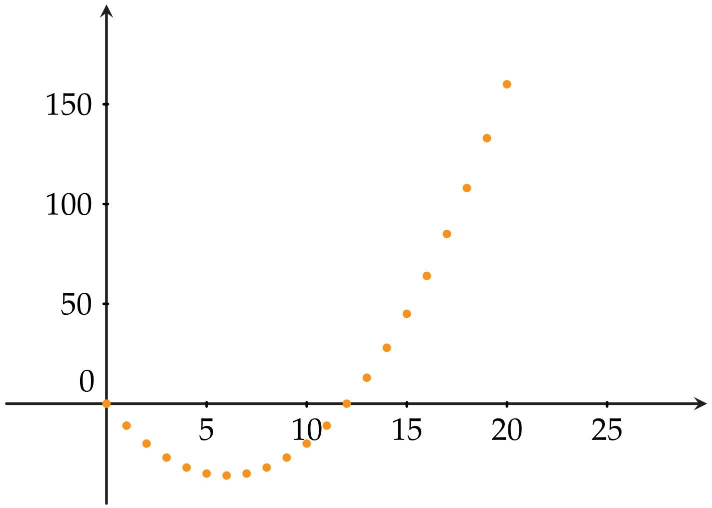
REMARQUE : Des définitions plus complètes seront données en Terminale.

Exemples

- (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel par $u_n = (-1)^n$.
  Elle est divergente et n'a pas de limite.



- (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel par $u_n = n^2 - 12n$.



Elle est divergente et a pour limite $+\infty$. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

MÉTHODE 5 Conjecturer la limite d'une suite à partir de valeurs

Sur la table de la calculatrice ou un tableur :

- on regarde les termes de la suite pour des grandes valeurs de n ;
- s'ils semblent tendre vers un nombre l (ou vers $+\infty$ ou $-\infty$), on conjecture que la suite converge vers l (ou diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$).

Exercice d'application

n	$u(n)$
0	-1
5	.12179
10	.0301
15	.01335
20	.00751
25	.0048
30	.00333

Conjecturer la limite de la suite (u_n) définie pour $n > 1$ par $u_n = \dfrac{1+3n^2}{n^4-1}$.

Correction

Les termes de la suite semblent tendre vers 0.

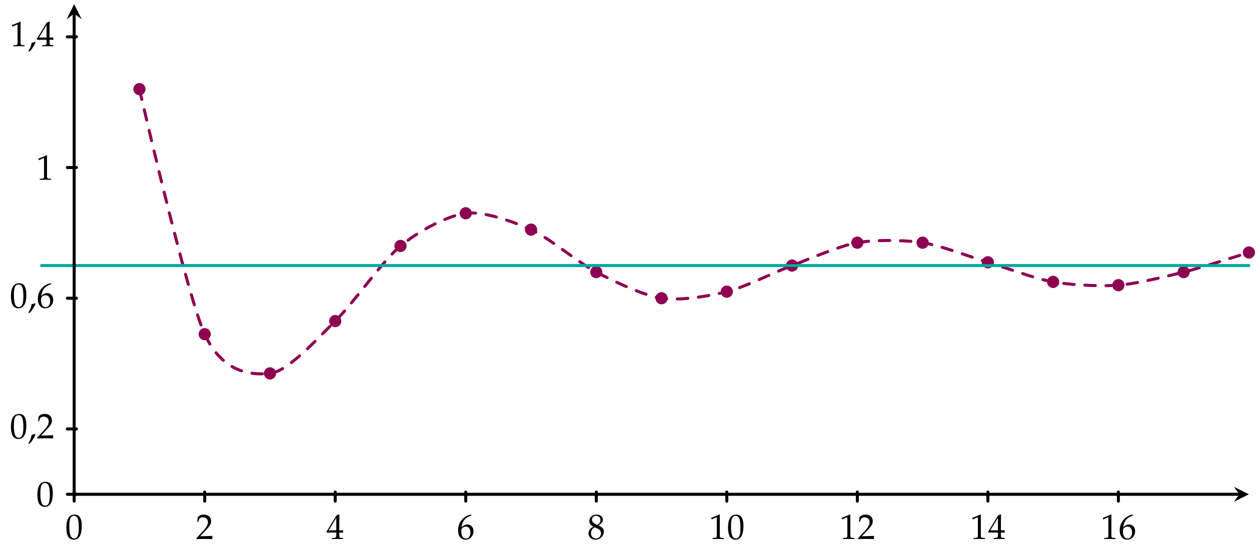
On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

MÉTHODE 6 Lire graphiquement la limite d'une suite

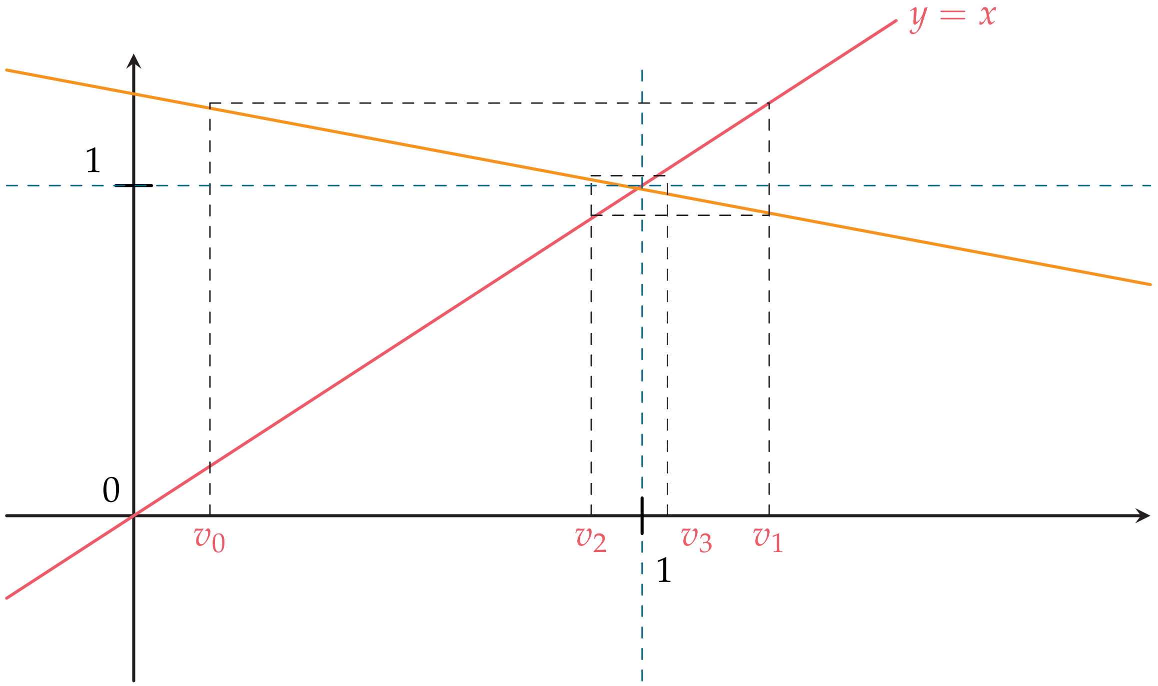
- Si la suite est définie de façon explicite, on observe si les ordonnées semblent se rapprocher d'une valeur quand n prend des valeurs de plus en plus grandes.
- Si la suite est définie par récurrence, on regarde en abscisse si les termes de la suite se rapprochent de plus en plus d'une valeur quand n prend des valeurs de plus en plus grandes.

Exercice d'application

1) Lire graphiquement la limite de la suite représentée ci-dessous.



2) Lire graphiquement la limite de la suite représentée ci-dessous.



Correction

1) La suite représentée ci-dessus semble converger vers 0,7.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0,7$.

2) La suite représentée ci-dessus semble converger vers 1.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.