MÉTHODE Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

1) On commence par identifier la forme de la fonction f (somme, produit, inverse, quotient de fonctions usuelles).
2) On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité.
3) On dérive séparément chacune des fonctions composant f.
4) On calcule $f'(x)$ en appliquant les formules de dérivation du cours.

Exercice d'application Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + 5$

2) $g(x) = x\sqrt{x}$

3) $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

4) $i(x) = \dfrac{x-3}{2x+4}$

Correction

1) f est de la forme $u + v + w$ (somme) avec $u(x) = 7x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $w(x) = 5$.
Ces trois fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour f.
De plus, $u'(x) = 7 \times (3x^2) = 21x^2$, $v'(x) = -2 \times (2x) = -4x$ et $w'(x) = 0$.
Ainsi, pour tout réel x :

$$f'(x) = 21x^2 - 4x.$$

2) g est de la forme uv (produit) avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$. Ces deux fonctions sont définies sur $[0\,;\,+\infty[$ et dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, il en est de même pour g.
De plus, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}.$$

3) h est de la forme $\dfrac{1}{v}$ (inverse) avec $v(x) = x^2 + 1$. v est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais donc h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, $v'(x) = 2x$. Ainsi, pour tout réel x :

$$h'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

4) i est de la forme $\dfrac{u}{v}$ (quotient) avec $u(x) = x - 3$ et $v(x) = 2x + 4$. Ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ mais v s'annule en -2. Donc i est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
De plus, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2$. Ainsi, pour tout $x \neq -2$:

$$i'(x) = \frac{1 \times (2x+4) - (x-3) \times 2}{(2x+4)^2} = \frac{10}{(2x+4)^2}.$$

PROPRIÉTÉ : Dérivation : somme et produit

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- La fonction $u + v : x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et on a $(u+v)' = u' + v'$.
- La fonction $ku : x \mapsto ku(x)$ est dérivable sur I et on a $(ku)' = ku'$.
- La fonction $uv : x \mapsto u(x)v(x)$ est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v + uv'$.

PROPRIÉTÉ : Dérivation : inverse et quotient

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I telles que v ne s'annule pas sur I.
Alors :

- La fonction $\dfrac{1}{v} : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$ est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
- La fonction $\dfrac{u}{v} : x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.