Exemple Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 5$ et $BC = 8$. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction

On a $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(BC^2 - BA^2 - AC^2\right) = \frac{1}{2}\left(8^2 - 6^2 - 5^2\right) = \frac{3}{2}.$

Dans un repère orthonormé, on considère $A(0\ ;\ 0)$, $B(5\ ;\ 1)$ et $C(2\ ;\ 4)$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, AB et AC.

2) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

   On donnera le résultat en degrés, arrondi à 0,1 près.

Correction

1) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ donc :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 2 + 1 \times 4 = 14$
- $AB = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$
- $AC = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

2) De $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$, on déduit que $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \dfrac{14}{\sqrt{26} \times 2\sqrt{5}} = \dfrac{7}{\sqrt{130}}$.

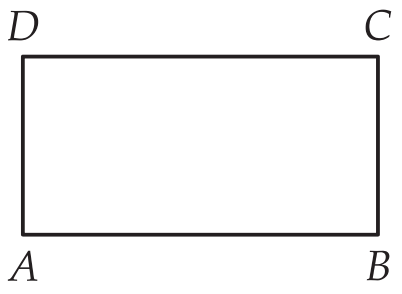
   La calculatrice donne $\widehat{BAC} \approx 52,1^\circ$.

Soit A, B, C et D quatre points du plan. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

Correction

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$
d'après la relation de Chasles.

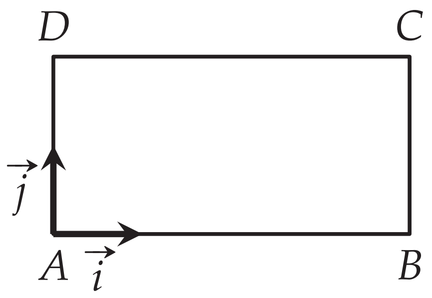
On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB = 4$ et $AC = 2$.



Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Correction

On introduit $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ de sorte que le repère $\left(A\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$ soit orthonormé et respecte les longueurs données par l'énoncé.



On a alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 4 + 0 \times 2 = 16.$$

Soit quatre points $A(-1\ ;\ 2)$, $B(5\ ;\ 0)$, $C(3\ ;\ 4)$ et $D(6\ ;\ 13)$ dans un repère orthonormé.
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Correction

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 6 \times 3 + (-2) \times 9 = 18 - 18 = 0.$$

On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, vecteurs directeurs des deux droites, sont orthogonaux donc que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.