1. Signe de la dérivée et variations

PROPRIÉTÉ : Du sens de variation de f au signe de $f'(x)$

1) Si f est constante sur I, alors $f'(x) = 0$ pour tout réel x de I.

2) Si f est strictement croissante sur I, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x de I.

3) Si f est strictement décroissante sur I, alors $f'(x) \leq 0$ pour tout réel x de I.

PREUVE Soit $x \in I$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \in I$.

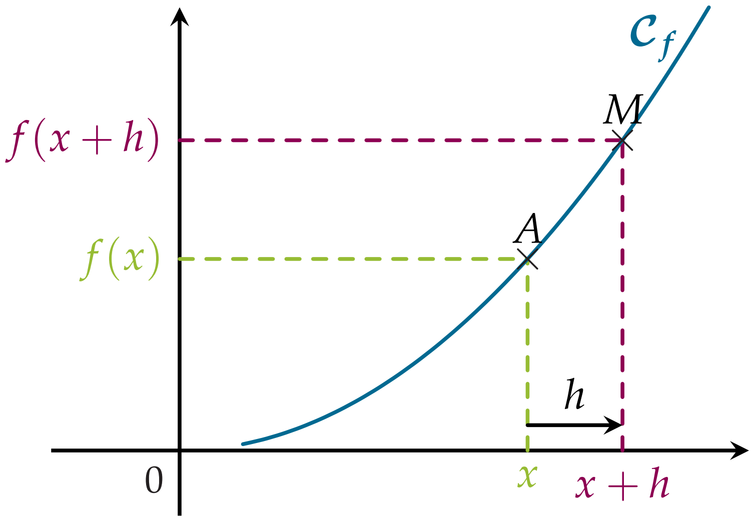
1) f est constante sur I donc par définition : pour tous u et v de I, on a $f(u) = f(v)$.
En particulier, en posant $u = x + h$ et $v = x$, on obtient :

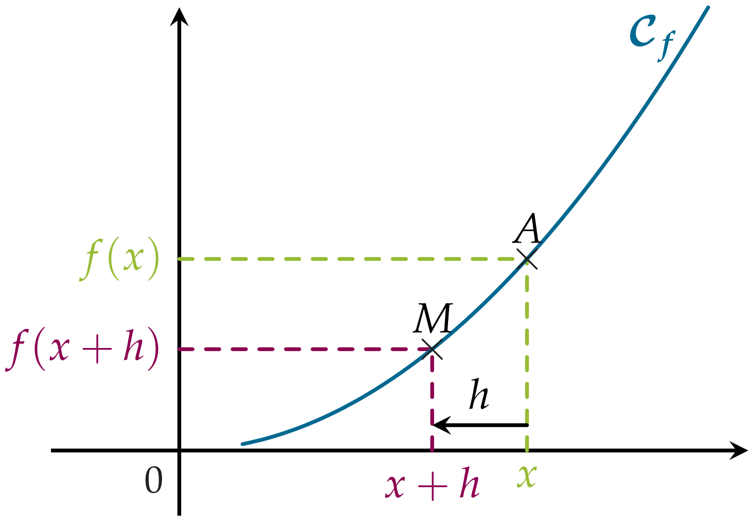
$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

Le membre de gauche de cette égalité tendant vers $f'(x)$ lorsque $h \to 0$, on en déduit que $f'(x) = 0$.

2) f est strictement croissante sur I donc par définition : pour tous u et v de I tels que $u < v$, on a $f(u) < f(v)$. En particulier :

- Si $h > 0$, alors $x < x + h$ et donc $f(x) < f(x+h)$, c'est-à-dire $f(x+h) - f(x) > 0$.
- Si $h < 0$, alors $x > x + h$ et donc $f(x) > f(x+h)$, c'est-à-dire $f(x+h) - f(x) < 0$.





$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(x)$ (coefficient directeur de (AM)) est donc le quotient de deux quantités de même signe, donc toujours strictement positif. Lorsque $h \to 0$, on obtient intuitivement que $f'(x) \geq 0$.

3) Même principe de démonstration que pour le 2$^{\text{e}}$ point.

REMARQUE : La limite d'une quantité strictement positive peut être égale à 0. Par exemple, admettons que l'on ait, pour tout $h > 0$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(x) = h$. Lorsque h tend vers 0, ce taux d'accroissement tend donc vers 0 et on obtient $f'(x) = 0$.

Exemple

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On a donc $f'(x) = 2x$.
   f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et on a bien $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\infty\,;\,0]$.
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. On a donc $f'(x) = 3x^2$.
   f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a bien $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque : En pratique, on utilisera plutôt la propriété suivante (qui est presque réciproque de la précédente) car il est plus facile d'obtenir le signe d'une expression que le sens de variation d'une fonction.

PROPRIÉTÉ : Du signe de $f'(x)$ au sens de variation de f

1) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
2) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
3) Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

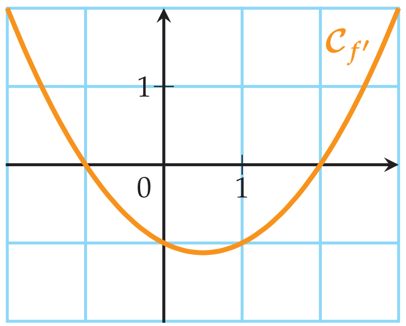
MÉTHODE 1 Déterminer les variations d'une fonction

1) On détermine l'ensemble de définition et de dérivabilité de f puis on calcule $f'(x)$.
2) On étudie le signe de $f'(x)$.
3) On en déduit les variations de f et on résume le tout dans un tableau.

Exercice d'application Déterminer les variations de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} - x.$$

Correction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 1$. f' est une fonction polynôme du second degré et ses racines sont -1 et 2. Comme $a > 0$, on a alors :



D'où le signe de $f'(x)$ et les variations de f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\frac{7}{12}$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	

Pour compléter le tableau, on calcule :

- $f(-1) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{-2-3+12}{12} =$
- $f(2) = \frac{8}{6} - 1 - 2 = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$

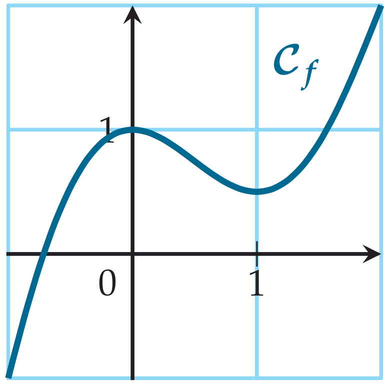
2. Extrema d'une fonction

DÉFINITION : Extremum

1) On dit que f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en a s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I et contenant a tel que, pour tout $x \in J$: $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).
2) Dire qu'une fonction admet un **extremum local** signifie que f admet un maximum local ou un minimum local.

REMARQUE : Un intervalle ouvert est un intervalle de la forme $]\alpha\ ;\ \beta[$ où α et β sont deux réels tels que $\alpha < \beta$.

Exemple La fonction f représentée ci-dessous est définie sur $I = [-1\ ;\ 2]$.



1) f admet un maximum local en $a = 0$.
   En effet, prenons $J =]-0,5\ ;\ 0,5[$ pour lequel on a bien $0 \in J \subset I$ et pour tout $x \in J$, $f(x) \leq 1$.
2) f admet un minimum local en $a = 1$.
   En effet, prenons $J =]0,5\ ;\ 1,5[$ pour lequel on a bien $1 \in J \subset I$ et pour tout $x \in J$, $f(x) \geq \dfrac{1}{2}$.
3) On ne peut pas dire que f admet un maximum local en $a = 2$ car on ne peut pas trouver d'intervalle ouvert contenant a et contenu dans I.

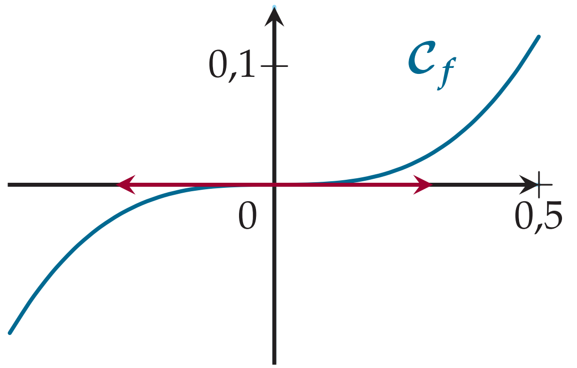
PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

PREUVE Voir exercice 64 p. 98.

REMARQUE :

La réciproque de cette propriété est fausse. Prenons par exemple la fonction cube, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Sa fonction dérivée, $f' : x \mapsto 3x^2$ s'annule en 0 mais pourtant f n'admet pas d'extremum en 0 puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



64 Démonstration

On souhaite démontrer la propriété laissée en exercice p. 86 : on suppose que f admet un maximum local en a et on veut démontrer que $f'(a) = 0$.

On note J un intervalle ouvert, centré en a et contenu dans I : $J =]a - \varepsilon\ ;\ a + \varepsilon[$. On considère le taux d'accroissement, pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

1) Questions préliminaires

a) Relier les notions ayant la même signification :

- $\displaystyle\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) \underset{\substack{h \to 0 \\ h<0}}{\to}$ • $f'_{\text{droite}}(a)$
- $\displaystyle\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) \underset{\substack{h \to 0 \\ h>0}}{\to}$ • $f'_{\text{gauche}}(a)$

b) Lorsque f est dérivable en a, que peut-on dire de $f'_{\text{gauche}}(a)$ et $f'_{\text{droite}}(a)$?

2) Soit h tel que $a + h \in]a - \varepsilon\ ;\ a[$.

a) Quel est le signe de h ?

b) En déduire le signe du taux d'accroissement.

c) En déduire le signe de $f'_{\dots}(a)$.

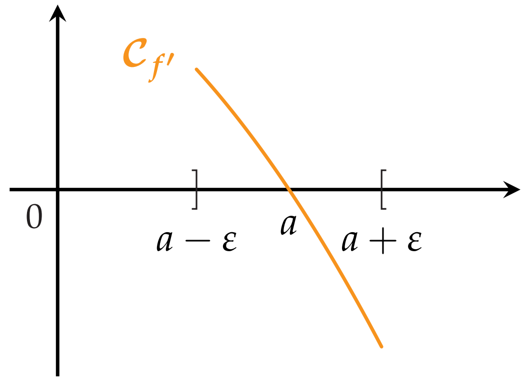
3) Refaire le raisonnement sur l'intervalle $]a\ ;\ a + \varepsilon[$.

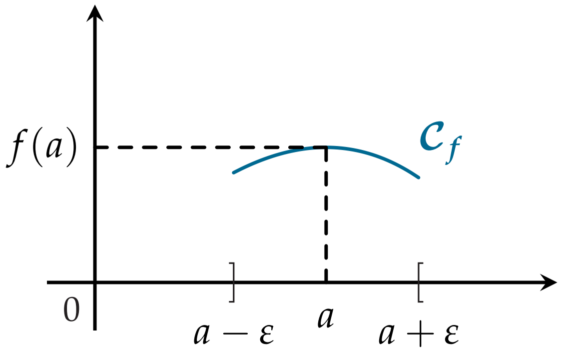
4) Conclure.

PROPRIÉTÉ : Caractérisation d'un extremum

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
Si f' s'annule en changeant de signe en a, alors f admet un extremum local en a.

PREUVE Traitons le cas où $f'(x)$ est strictement positive « avant a », nulle en a et strictement négative « après a ». Mathématiquement, cela se traduit par l'existence d'un intervalle ouvert $J =]a - \varepsilon \,;\, a + \varepsilon[$ tel que $f'(x) > 0$ sur $J_1 =]a - \varepsilon \,;\, a[$ et $f'(x) < 0$ sur $J_2 =]a \,;\, a + \varepsilon[$. Ainsi, f est strictement croissante sur J_1 et strictement décroissante sur J_2. Cela signifie que pour tout $x \in J_1$, $f(x) > f(a)$ et pour tout $x \in J_2$, $f(x) < f(a)$ et donc, pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(a)$.





Le cas d'un minimum se traite de la même manière.

MÉTHODE 2 Faire le lien entre extrema et dérivée

1) On repère les extrema locaux de f en lesquels f' doit s'annuler en changeant de signe.

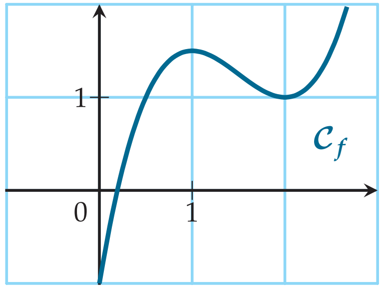
2) On repère la nature de chaque extremum :

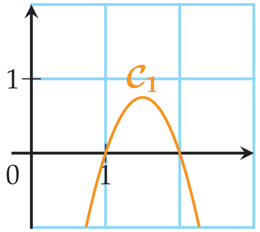
   a) si c'est un maximum, la dérivée doit être positive « avant » et négative « après » ;

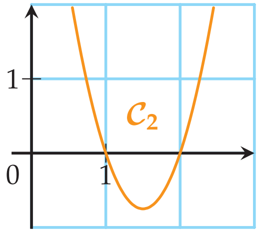
   b) si c'est un minimum, la dérivée doit être négative « avant » et positive « après ».

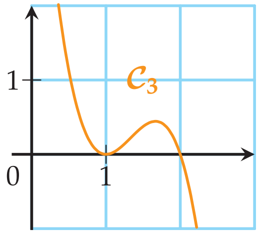
Exercice d'application

On considère une fonction f dont on donne la représentation graphique ci-contre.
Parmi les courbes ci-dessous, laquelle est susceptible de représenter f' ?









Correction f possède deux extrema locaux en $x = 1$ et $x = 2$. La dérivée doit donc s'annuler en changeant de signe en $x = 1$ et $x = 2$: on peut donc éliminer $\mathcal{C}_3$ car la fonction associée à cette courbe ne change pas de signe en $x = 1$.
En $x = 1$, l'extremum est un maximum donc $f'(x)$ doit être positive « avant 1 » , s'annuler en 1 puis être négative « après 1 » : seule la courbe $\mathcal{C}_2$ convient.
On peut vérifier avec l'autre extremum : en $x = 2$ on a un minimum et la fonction associée à la courbe $\mathcal{C}_2$ est bien négative « avant 2 » et positive « après 2 ».