Fonctions dérivées et applications de la dérivation

I Opérations sur les fonctions dérivées

Théorème 1
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
La **somme** des fonctions u et v est dérivable sur I et on a $(u+v)' = u' + v'$.

Exemple 1
La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} + x^3 + x$ est dérivable sur .... et on a : $f'(x) =$..............

Théorème 2
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
Le **produit** des fonctions u et v est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'\ v + u\ v'$.

Démonstration
Il s'agit de montrer que pour tout a de I, on a $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = u'(a)\ v(a) + u(a)\ v'(a) \quad (1).$
Pour $h \neq 0$ et pour tout a de I, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} &= \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{h} \\
&= \frac{\qquad\qquad - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) \qquad\qquad}{h} \\
&= \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}{h} \\
&= \frac{\qquad\qquad}{h}\ v(a+h) + u(a)\ \frac{\qquad\qquad}{h} \quad (2).
\end{aligned}$$

Comme u est dérivable en a, on sait que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = \ldots\ldots.$

Comme v est dérivable en a, on sait que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} = \ldots\ldots.$

On admet le résultat suivant : $\lim\limits_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$.

Ces trois dernières limites permettent de déduire (1) à partir de (2).

Théorème 3 (Conséquence)
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et soit k une constante.
Le produit de la fonction u par k est dérivable sur I et on a $(ku)' = ku'$.

Exemple 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 2x^2 \times \sqrt{x}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $u(x) = \ldots\ldots\ldots$ et $v(x) = \ldots\ldots\ldots.$
Les fonctions u et v sont dérivables sur .... ; $u'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $v'(x) = \ldots\ldots\ldots$

La fonction f est alors dérivable sur ....et on a :

$f'(x) =$ ....

Théorème 4
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas dans cet intervalle.
L'inverse de la fonction u est alors dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

Exemple 3
Soit f la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{3x+6}$.

Pour tout $x \in]-2;+\infty[$, on pose $u(x) = 3x + 6$.

La fonction u est dérivable et ne s'annule pas sur $]-2;+\infty[$. On a de plus : $u'(x) = \ldots\ldots$.

f est donc dérivable sur $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et on a $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Théorème 5 (Conséquence)
Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec $v(x) \neq 0$ pour tout x de I.
Le quotient de la fonction u par la fonction v est dérivable sur I et on a $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$.

Exemple 4
Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

Pour tout $x \in]1;+\infty[$, on pose $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $v(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $]1;+\infty[$ et v ne s'annule pas sur cet intervalle.

De plus, on a $u'(x) = \ldots\ldots$ et $v'(x) = \ldots\ldots$.

f est donc dérivable sur $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et on a $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

II Fonction dérivée et étude de fonction

1) Lien entre signe de la fonction dérivée et sens de variation

Théorème 6
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I, alors la fonction f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I, alors la fonction f est croissante sur I.

Exemple 5
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 8$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \ldots\ldots\ldots$.
$f'(x) \geq 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots \geq 0 \iff x\ \ldots\ \ldots\ldots$ et $f'(x) \leq 0 \iff \ldots\ldots\ldots\ldots \leq 0 \iff x\ \ldots\ \ldots\ldots$

La fonction f est donc décroissante sur $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et croissante sur $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Lorsque les variations d'une fonction sont déduites du signe de sa dérivée, il est commode de résumer cela dans un tableau de variations dans lequel on ajoute une ligne pour ce signe.

x	$-\infty$		$\ldots\ldots$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
$f(x)$					

Remarque : Pour étudier les variations d'une fonction f, il n'est pas toujours nécéssaire de déterminer le signe de sa dérivée f'.

Considérons par exemple la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 8}$.

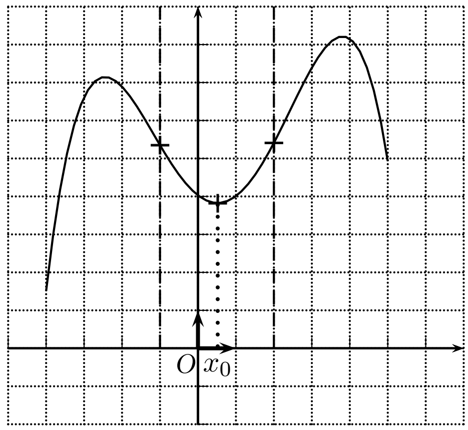
En appliquant les propriétés vues au chapitre 10, on peut affirmer que la fonction f est .... sur l'intervalle $]2;+\infty[$ car la fonction $x \mapsto x^3$ est .... sur cet intervalle.

2) Extremum d'une fonction

Définition 1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
*On dira que f admet un **maximum local** en $x_0 \in I$ s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, on ait $f(x) \leq f(x_0)$.*

Ceci signifie que "localement", au voisinage de x_0, la fonction f ne prend que des valeurs inférieures à $f(x_0)$.

*On dira que f admet un **minimum local** en $x_0 \in I$ s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que, pour tout $x \in J$, on ait $f(x) \geq f(x_0)$.*



Exemple 6
La fonction ci-dessus, représentée sur l'intervalle $I = [-4;5]$, admet un minimum local en $x_0 = 0,5$.
On a alors, pour tout $x \in J =]-1;2[$ par exemple, $f(x) \geq f(x_0)$.

Théorème 7
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors on a $f'(x_0) = 0$.

Remarque : La réciproque du théorème n'est pas vraie, il faut ajouter une hypothèse.

Théorème 8
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.
Si $f'(x_0) = 0$ et **si f change de signe en x_0** alors f admet un extremum local en x_0.

Exemple 7
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.
f est dérivable sur ...... et pour tout $x \in$ ......, on a $f'(x) =$ ....
La dérivée est une fonction .... $f'(x) = 0 \iff$ .... $= 0 \iff x =$ ....
On établit le tableau de signes de f'.

x	$-\infty$	$\ldots$	$+\infty$
$f'(x)$	$\ldots$	0	$\ldots$

On constate que $f'(\ldots) = 0$ et que f' change de signe en $\ldots$
La fonction f admet donc un ...., atteint en $x = \ldots$, qui vaut $f(\ldots) =$ ....

Remarque : On aurait aussi pu utiliser les résultats établis au chapitre 1 pour trouver cet extremum.