1. Variable aléatoire et loi de probabilité

DÉFINITION : Variable aléatoire discrète

Soit $\Omega = \{e_1; e_2; ...; e_m\}$ l'univers fini d'une expérience aléatoire.
Une **variable aléatoire** X sur Ω est une fonction qui, à chaque issue de Ω, associe un nombre réel.

NOTATION : x est un réel, l'événement « X prend la valeur x » est noté $(X = x)$, il est formé de toutes les issues de Ω ayant pour image x.

DÉFINITION : Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$. Lorsqu'à chaque valeur x_i, on associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, on définit **la loi de probabilité** de X.

REMARQUE : La loi de probabilité d'une variable aléatoire se présente à l'aide d'un tableau.

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

On a $P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_n) = 1$.

MÉTHODE 1 Étudier une variable aléatoire

Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

1) on détermine les valeurs x_i que peut prendre X ;

2) on calcule les probabilités $P(X = x_i)$;

3) on résume les résultats dans un tableau.

Exercice d'application

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5.

Un joueur participe à la loterie en payant 2 €, ce qui lui donne le droit de prélever au hasard un jeton dans l'urne.

- Si le numéro est pair, il gagne en euros le double de la valeur indiquée par le jeton.
- Si le numéro est impair, il perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au « gain algébrique ».

Déterminer la loi de probabilité de X.

Correction

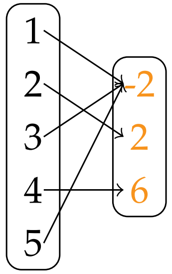
L'univers est l'ensemble des 5 jetons.

Les cinq issues sont équiprobables.

Les jetons 1, 3 et 5 font perdre 2 euros ;

le jeton 2 fait gagner $2 \times 2 - 2 = 2$ euros ;

le jeton 4 fait gagner $4 \times 2 - 2 = 6$ euros.



X peut prendre les valeurs -2 ; 2 et 6.

L'événement $(X = -2)$ est réalisé pour les issues 1 ; 3 ; 5 donc $P(X = -2) = \dfrac{3}{5}$.

L'événement $(X = 2)$ est réalisé pour l'issue 2 donc $P(X = 2) = \dfrac{1}{5}$.

L'événement $(X = 6)$ est réalisé pour l'issue 4 donc $P(X = 6) = \dfrac{1}{5}$.

On présente la **loi de probabilité** de X dans un tableau.

x_i	-2	2	6
$P(X = x_i)$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

2. Espérance, variance et écart-type

DÉFINITIONS

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1 ; x_2 ; ... ; x_n$ avec les probabilités $p_1 ; p_2 ; ... ; p_n$.

- On appelle **espérance** de X le nombre : $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{i=n} p_ix_i$.
- On appelle **variance** de X le nombre :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2$$
$$= \sum_{i=1}^{i=n} p_i(x_i - E(X))^2.$$

- On appelle **écart-type** de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

REMARQUES :

- Le mot « espérance » vient du langage des jeux : lorsque X désigne le gain, $E(X)$ est le gain moyen que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties.
- Une autre formule de la variance est $V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i{x_i}^2 - [E(X)]^2$ (voir exercice 70, p. 286).

VOCABULAIRE : Un jeu est **équitable** lorsque l'espérance du gain est nulle.

70 Formule de König

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

On rappelle que :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i \text{ et } V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i (x_i - E(X))^2.$$

1) Démontrer que $V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i {x_i}^2 - (E(X))^2$.

2) On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

Calculer $V(X)$ avec la formule trouvée au **1)**.

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

MÉTHODE 2 Utiliser la calculatrice

On souhaite calculer l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire.

- **Avec une TI**

  Appuyer sur STAT, puis menu EDIT, sélectionner 1 : Edite

  Entrer les valeurs x_i en liste L1 et les probabilités p_i en liste L2

  Pour afficher les paramètres, appuyer sur STAT, puis menu CALC, sélectionner 1 :Stats 1-Var, taper L1,L2, puis appuyer sur Entrer.

- **Avec une Casio**

  Sélectionner le menu 2 (STAT)

  Entrer les valeurs x_i dans List1 et les probabilités p_i dans List2.

  Sélectionner (F2) CALC puis (F6) SET, sélectionner 1 : Var Xlist (F1) List 1 et 1VarFreq (F2) List2. Appuyer sur EXIT (F1) 1Var.

Exercice d'application

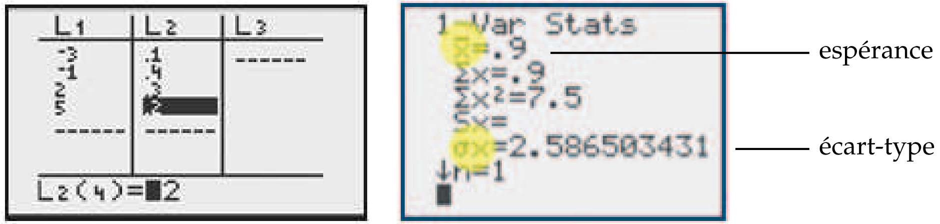
On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ avec une calculatrice.

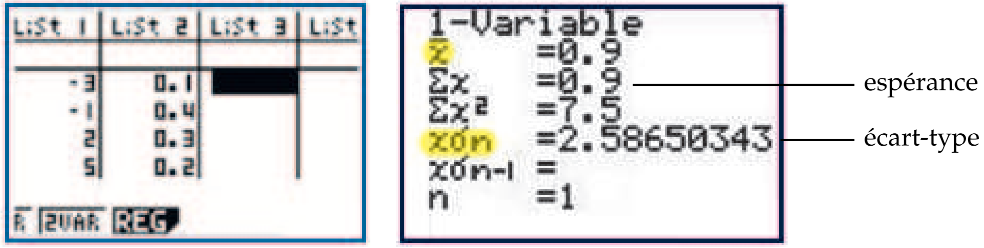
x_i	-3	-1	2	5
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Correction

Avec une TI



Avec une Casio



MÉTHODE 3 Interpréter l'espérance et la variance

Exercice d'application

On donne les lois de probabilités du gain X et Y de deux jeux.

Jeu n° 1

x_i	-5	-1	0	1	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,1	0,3

Jeu n° 2

y_i	-3	-1	0	1	2
$P(Y = y_i)$	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Quel jeu peut-on conseiller au joueur ?

Correction

Pour le jeu n° 1 : $E(X) = -0,3$, $V(X) = 8,01$ et $\sigma(X) \approx 2,83$.

Pour le jeu n° 2 : $E(Y) = -0,3$, $V(Y) = 1,81$ et $\sigma(Y) \approx 1,35$.

Les deux jeux ont la même espérance de gain, celle-ci étant négative. Les jeux sont **défavorables** aux joueurs, on peut donc les déconseiller.

L'écart-type mesure la dispersion des gains autour de l'espérance, donc il évalue le **risque du jeu**. Ici, $\sigma(Y) < \sigma(X)$.

Si un joueur veut vraiment participer, il vaut mieux lui conseiller le jeu n° 2 pour lequel le degré de risque est moins grand.

3. Transformation affine d'une variable aléatoire

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1 ; x_2 ; ... ; x_n.
Pour tous réels a et b, on peut définir une autre variable aléatoire, en associant à chaque issue donnant la valeur x_i, le nombre $ax_i + b$. On note cette variable aléatoire $aX + b$.

PROPRIÉTÉ

$$E\left(aX+b\right) = aE(X) + b \quad \text{et} \quad V\left(aX\right) = a^2 V\left(X\right).$$

REMARQUE : $V\left(aX+b\right) = a^2 V\left(X\right)$ et $\sigma\left(aX+b\right) = |a|\,\sigma\left(X\right)$

En effet :

- $$\begin{aligned} V\left(aX+b\right) &= \sum_{i=1}^{i=n} p_i\left(ax_i + b - E\left(aX+b\right)\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} p_i\left(ax_i + b - aE\left(X\right) - b\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} p_i a^2\left(x_i - E\left(X\right)\right)^2 \end{aligned}$$

  $$V\left(aX+b\right) = a^2 V\left(X\right)$$

- $$\begin{aligned} \sigma\left(aX+b\right) &= \sqrt{V\left(aX+b\right)} \\ &= \sqrt{a^2 V\left(X\right)} = |a|\sqrt{V\left(X\right)} \end{aligned}$$

  $$\sigma\left(aX+b\right) = |a|\,\sigma\left(X\right)$$

PREUVE

$$\begin{aligned}
E(aX+b) &= p_1(ax_1+b)+p_2(ax_2+b)+...+p_n(ax_n+b)\\
&= ap_1x_1+bp_1+ap_2x_2+bp_2+...+ap_nx_n+bp_n\\
&= ap_1x_1+ap_2x_2+...+ap_nx_n+bp_1+bp_2+...+bp_n\\
&= a(p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n)+b(p_1+p_2+...+p_n)\\
&= aE(X)+b\times 1\\
E(aX+b) &= aE(X)+b
\end{aligned}$$

D'après la seconde formule de la variance :
$V(aX) = p_1(ax_1)^2 + p_2(ax_2)^2 + ... + p_n(ax_n)^2 - [E(aX)]^2$

D'après la formule précédente : $E(aX) = aE(X)$, donc :

$$\begin{aligned}
V(aX) &= p_1a^2{x^2}_1+p_2a^2{x^2}_2+...+p_na^2{x^2}_n-[aE(X)]^2\\
&= a^2\left(p_1{x^2}_1+p_2{x^2}_2+...+p_n{x^2}_n\right)-a^2[E(X)]^2\\
&= a^2\left(p_1{x^2}_1+p_2{x^2}_2+...+p_n{x^2}_n-[E(X)]^2\right)\\
V(aX) &= a^2V(X)
\end{aligned}$$

Exemple

On donne $E(X) = 3$ et $V(X) = 16$.

Calculer :

1) $E(-2X+5)$
2) $V(-2X+5)$
3) $\sigma(-2X+5)$

Correction

1) $E(-2X+5) = -2E(X) + 5 = -2 \times 3 + 5 = -1$
2) $V(-2X+5) = (-2)^2 \times V(X) = 4 \times 16 = 64$
3) $\sigma(-2X+5) = |-2|\sigma(X) = 2\sqrt{V(X)} = 2 \times \sqrt{16} = 8$

MÉTHODE 4 Appliquer une transformation affine

Exercice d'application

Un coiffeur se déplace à domicile.

On note X le nombre de rendez-vous sur une journée.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,03	0,09	0,15	0,38	0,18	0,17

Chaque rendez-vous lui rapporte 30 euros, et ses frais de fonctionnement quotidiens s'élèvent à 15 euros.

On note Y son gain journalier.

1) Calculer $E(X)$.

2) Quelle relation lie X et Y ?

3) En déduire $E(Y)$.

Correction

1) $E(X) = 0,03 \times 0 + 0,09 \times 1 + 0,15 \times 2 + 0,38 \times 3 + 0,18 \times 4 + 0,17 \times 5$

$E(X) = 3,1.$

2) Le gain journalier Y est tel que $Y = 30X - 15$.

3) $$\begin{aligned} E(Y) &= E(30X - 15) \\ &= 30E(X) - 15 \\ &= 30 \times 3,1 - 15 \\ &= 93 - 15 \end{aligned}$$

$E(Y) = 78$ (en euros).

Ainsi, le coiffeur peut espérer gagner 78 euros en moyenne par jour.