El copiado de figuras como un problema geométrico para los niños

Maria Emilia Quaranta
y Beatriz Ressia de Moreno

Se presenta a continuación una secuencia de reproducción en sala de 5 años, abriendo algunas reflexiones a propósito del abordaje didáctico de las figuras geométricas en el nivel inicial.

El marco de referencia para estos análisis está constituido por algunos elementos de la "corriente francesa" en didáctica de la matemática. Brevemente, desde dicho cuerpo teórico, se considera que el aprendizaje matemático se despliega a partir de la resolución de problemas que requieran de los conocimientos que se pretende enseñar y de la reflexión en torno a lo realizado. De este modo, cuando se trata de aproximar a los alumnos a las figuras geométricas se busca proponer problemas que impliquen la consideración de ciertas características de las figuras, para luego dar lugar a instancias de análisis de los procedimientos utilizados, las decisiones tomadas, los conocimientos allí involucrados, etcétera. A su vez, estas reflexiones alimentarán futuras resoluciones y así…

Introducción

Este interjuego entre resoluciones y análisis pone en funcionamiento un conjunto de anticipaciones a través de las decisiones que los alumnos deben tomar a la hora de resolver problemas y posteriores validaciones de dichas anticipaciones. Es decir, no se trata sólo de que los niños resuelvan, sino de que se involucren en una búsqueda por establecer la validez de sus producciones. Volveremos sobre estos aspectos a propósito de la actividad que analizaremos.

Ahora bien, ¿de qué se ocupa la geometría? ¿Son objetos abordables en el nivel inicial? Si bien muchos de los conocimientos geométricos tuvieron su origen para responder a problemas del espacio físico, su desarrollo posterior los ha convertido en objetos teóricos que no corresponden estrictamente con ningún objeto de la realidad. Esta naturaleza "ideal" de los objetos geométricos hace que la validación a la que recién hacíamos referencia no pueda ser empírica, sino que deba apelar a argumentaciones. Los contenidos de los cuales nos ocupamos en jardín pueden tener cierta vinculación o apoyatura en el espacio físico, pero desde la enseñanza no debemos perder de vista que estamos aproximando o dirigiendo a nuestros alumnos hacia objetos que no se corresponden con ningún objeto real. El abordaje de contenidos geométricos permite poner en funcionamiento el tipo de trabajo matemático que se busca promover en las salas.

Descripción de la tarea

REPRODUCCIÓN DE UNA FIGURA

(Destinado a alumnos de tercera sección.)

Objetivo didáctico

Proponer un problema que permita a los alumnos comenzar a identificar relaciones entre los elementos con la finalidad de poder copiarlo.

Finalidad para el alumno

Lograr una reproducción del cuadrado de modo tal que la figura entregada como modelo y la copia resulten superponibles.

Contenidos

Análisis de algunas características del cuadrado: lados rectilíneos, cantidad de lados, ángulos rectos.

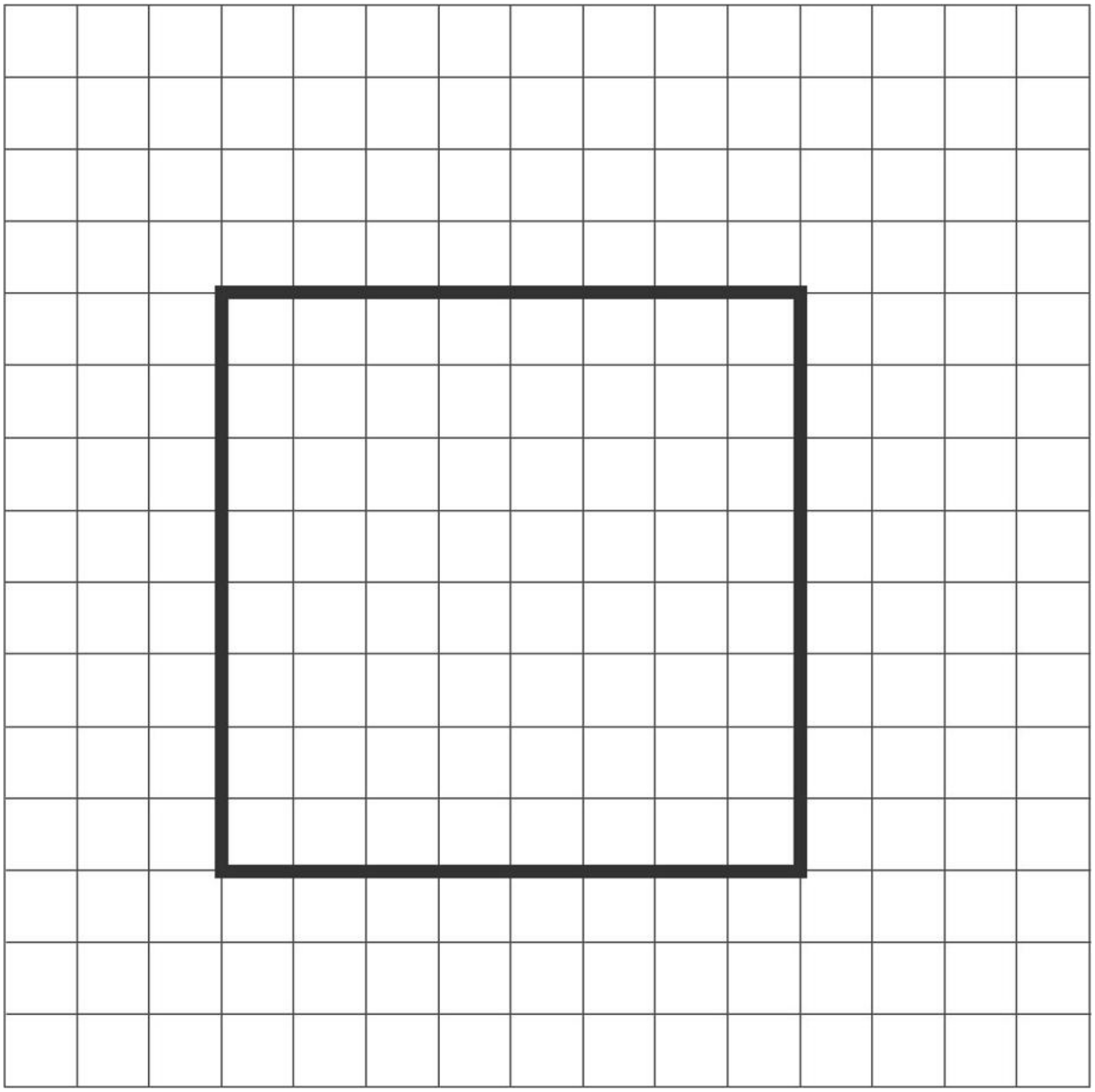
Organización de la sala

Trabajo individual y posterior discusión colectiva.

- El dibujo de un cuadrado sobre hoja cuadriculada.
- Hojas cuadriculadas.
- Lápiz y goma.
- Regla.

Presentación del problema

El docente entrada a cada alumno una hoja con el siguiente dibujo:



Los niños deberán copiarlo en otra hoja cuadriculada, tratando de lograr que resulten iguales. Una vez finalizada la reproducción, se verificará si efectivamente te han quedado iguales superponiéndolos a trasluz. Para ello, cuando los alumnos hayan terminado, procederán a superponerlos – aquí la maestra pasará por las mesas ayudándoles o mostrándoles cómo hacerlo- para ver si coinciden o no. En cado de que no coincidan, tratarán de ver por qué, qué sucedió, qué deberían haber hecho o tenido en cuenta para qué sí coincidieran, etcétera.

Luego, se organizará una puesta en común destinada a analizar algunas producciones seleccionadas por el docente. Allí, en lo posible tratando de no identificar a los autores, se analizará con todo el grupo si pudieron superponerse con el original o no, por qué, cómo habría que hacer para que sí se superpongan.

Posteriormente, se volverá sobre otra reproducción en la cual los alumnos puedan utilizar los conocimientos que hayan circulado en la puesta en común. También será posible proponer una nueva vuelta para copiar el modelo inicial, teniendo en cuanta lo discutido con todo el grupo.

Análisis de la tarea

Mencionamos anteriormente que concebimos el aprendizaje matemático sobre la base de la resolución de problemas, esto es, a partir de situaciones que plantean un desafío a los conocimientos de los alumnos. Para ello es posible distinguir ciertas condiciones para que una situación constituya un problema. Es necesario que:

- su resolución requiera de los conocimientos que queremos enseñar;
- los alumnos no dispongan de antemano de una resolución experta, es decir, que deben construir dicha resolución, que les demande un esfuerzo cognitivo, que no "alcance" con lo que ya saben;
- al mismo tiempo, que no resulte inabordable, es decir, que los niños puedan hacerse una representación de cuál sería la solución buscada aún cuando puedan comenzar a acercarse a ella, pero a veces no la alcancen;
- dé lugar a diferentes procedimientos de resolución.

A partir de estas condiciones, detengámonos unos instantes en la tarea de copiado solicitada en esta actividad.

El copiado de figuras geométricas forma parte de un conjunto de diferentes modalidades de construcciones geométricas. Éstas, bajo ciertas condiciones, pueden constituir verdaderos problemas geométricos que permiten la consideración de ciertas características de las figuras.

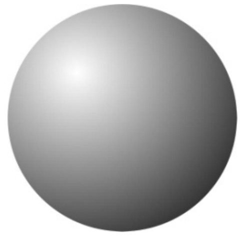
En la actividad que proponemos se trata de reproducir una figura cuyo modelo está disponible. El copiado permite comenzar a pensar esas figuras a partir de los elementos que las constituyen, en particular en las primeras interacciones con ellas, cuando se trata de ir más allá del simple reconocimiento perceptivo.

No se trata de enseñar cómo copiar un cuadrado, un rectángulo, etc., para que después lo "apliquen" en esta actividad. Todo lo contrario, el pedido de reproducción por parte de los alumnos es una ocasión para comenzar a tener en cuenta ciertas características de las figuras –cuántos "bordes" o "puntas" tienen; cuántos cuadritos tiene cada "costado"; cómo "doblan" esas puntas, cómo hacer para que el borde quede bien derechito, etc.-. Si el docente dijera con anterioridad cómo hacerlo, estas relaciones estarían siendo establecidas por el adulto; necesitamos, antes bien, que sean los niños mismos quienes las inviertan para tratar de resolver el problema planteado.

Nos referimos a la importancia de que los problemas permitan a los alumnos iniciar un proceso de búsqueda de la resolución. Este funcionamiento implica una gestión de la clase por parte del docente que permita introducir a los alumnos en un trabajo más autónomo, con cierta independencia, que no espere indicaciones del docente acerca de cómo hacerlo. En ese sentido, es importante la distinción establecida entre la finalidad didáctica de la situación y la finalidad para el alumno. La primera refiere a los objetivos didácticos: qué buscamos enseñar, qué queremos que aprendan los alumnos a través de esta secuencia de clases; la segunda refiere a la perspectiva del alumno resolviendo, a qué debe apuntar, cuál sería la solución buscada para esta situación. Por ejemplo, el alumno no se plantea como objetivo advertir explícitamente que el cuadrado tiene cuatro lados iguales, sino llegar a reproducir la figura como para poder superponerla, es decir, para tener éxito en lo que se le ha propuesto como problema. El análisis de la igualdad de los lados, como otros conocimientos que queremos que adquieran, constituyen aquí los recursos de solución.

¿Por qué decimos que esta distinción es importante? La finalidad de la situación para el alumno constituye un “norte” que orienta la construcción de la solución, así como su validación posterior: ¿lo logré?, ¿no?, ¿por qué?, ¿cómo debería haberlo hecho?, ¿qué tendría que tener en cuenta la próxima vez que lo haga?, etcétera. También permite al docente decidir acerca de intervenciones posibles en el momento de resolución que deberán remitir a la finalidad propuesta: por ejemplo, ante interpelaciones de los alumnos del tipo *¿puedo usar la regla para hacerlo derechito?*, *¿está bien así como sigue para abajo* [refiriéndose a un ángulo]?, se podrá responder: *¿se podrá superponer con éste* [el modelo] *después?*, etcétera. Es decir, se abre la posibilidad de reenviar a la finalidad de la situación sin aludir directamente a los medios de solución que los alumnos deberán poner en escena por sí mismos.

Buscamos que la enseñanza de la geometría se centre en la construcción del sentido de los conocimientos a través de su funcionamiento para resolver problemas.

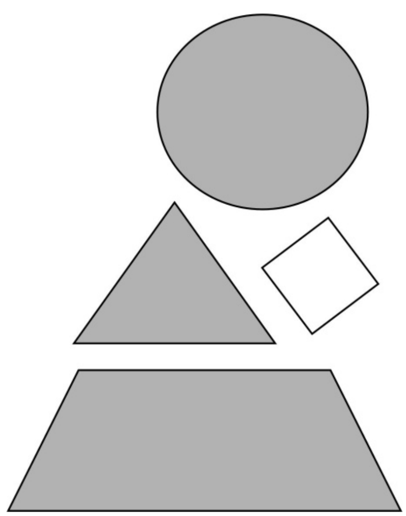


Intentar que la copia del cuadrado resulte superponible con el modelo provoca que los alumnos utilicen lo que saben como recursos para resolver ese problema. Frente al modelo, cada niño tendrá que establecer ciertas relaciones, identificar ciertos elementos y datos. Es decir, los niños realizarán un conjunto de anticipaciones, muchas veces, aún, en un nivel implícito, acerca de qué hay que tener en cuenta para copiar la figura dada. En este sentido, decíamos en la introducción, la resolución implica decisiones que involucran a los conocimientos que queremos enseñar, conocimientos que aparecen puestos en juego por los mismos alumnos fuertemente ligados a las situaciones que permiten resolver. Por ejemplo, en el problema planteado, deberán tener en cuenta que los dos lados son rectos, deberán buscar un medio para trazar líneas rectas, también deberán cuidar que los lados coincidan con las líneas de la cuadrícula, tendrán que considerar la longitud de esos lados – medible a través de la cantidad de cuadritos,- etcétera.

Por supuesto, no esperamos que aparezcan desde el inicio –ni al término de esta serie de clases en todos los alumnos- reproducciones superponibles. Dijimos que una de las condiciones de los problemas es que no permitan una resolución inmediata. De entrada, la copia y el original suelen ser muy distantes y es interesante que así sea. Al principio, los niños sólo tendrán en cuenta algunas características descuidando muchas otras. Es decir, con lo que saben pueden intentar comenzar a buscar una solución. Estas primeras anticipaciones los llevarán a creer que, siguiendo esas acciones previstas, obtendrán el dibujo de un cuadrado igual. Es curioso presenciar cómo se sorprenden cuando sus reproducciones no se superponen con el modelo original. Justamente, el análisis posterior a la superposición permitirá advertir relaciones no consideradas anteriormente, promoviendo avances en los conocimientos.

Estas puestas en juego y confrontación de sus conocimientos, ya sea cuando los niños deben decidir qué de todo lo que saben es más pertinente para resolver ese problema, cuando verifican por superposición si los cuadrados coinciden o no, o cuando comparan sus procedimientos y producciones con los de sus compañeros, etc., permitirán una progresiva elaboración de conocimientos.

Si la actividad consistiera en calcar el cuadrado en lugar de copiarlo, ¿qué conocimientos pondría en juego? ¿Haría falta hacer un análisis previo de la forma, ángulos, medidas de los lados? En el caso de tener que calcarlo, el problema pierde todo su sentido ya que se reduce a una actividad de motricidad fina. La tarea dejaría entonces de exigir la consideración de características de la figura, porque sólo bastaría seguir la línea, para lo cual no es necesario invertir conocimientos previos ligados a las formas geométricas ni generar reconocimientos sobre ellas.



Reiteramos, no nos interesa la precisión del trazado en sí misma sino el avance en la consideración de ciertas características de las figuras geométricas. Así, muchas veces, los chicos avanzan en sus reproducciones sin llegar a producir figuras superponibles con el modelo, logrando igualmente el objetivo didáctico perseguido.

Por otra parte, como mencionamos en la introducción, el quehacer matemático requiere que el sujeto pueda validar su producción, es decir, buscar por sí mismo la manera de obtener información acerca de la corrección o incorrección de lo realizado, en lugar de recurrir a una evaluación por parte del docente, como es tan frecuente. En la enseñanza, es muy habitual que esta instancia quede a cargo del maestro, quien establece si el trabajo de los niños está bien o mal, muchas veces sin que éstos alcancen a comprender las razones por las cuales sus producciones, estrategias, etc., resultaron correctas o erradas. Intentamos, en cambio, promover un interjuego en la clase que introduzca y sostenga a los alumnos en un proceso de búsqueda de informaciones acerca de la validez de sus producciones y las de sus compañeros. Este proceso de validación también es constitutivo de la construcción de conocimientos matemáticos, porque lleva a explicitar relaciones y a avanzar en las razones que hacen al funcionamiento de los procedimientos o de las afirmaciones sostenidas.

El lector podría objetar aquí que los niños de jardín son aún muy pequeños para introducirse en este tipo de trabajo. Sin embargo, veremos luego la posibilidad, necesidad y riqueza de esta actividad matemática a partir de fragmentos de registros de clase, ejemplos de explicitaciones y argumentos a favor o en contra de ciertas producciones o afirmaciones por parte de los chicos que han tenido lugar en una sala: *"es precisamente a partir de iniciarlos poco a poco en este modo de hacer y pensar que consideramos que es posible la producción de conocimiento matemático, es decir el aprendizaje progresivo de los conceptos"* (Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires, Orientaciones didácticas para Nivel Inicial -1ª parte-; 58).

En la actividad que estamos analizando, a través de la superposición de las dos figuras, los alumnos podrán verificar si sus estrategias fueron adecuadas si coinciden ambos cuadrados, o realizar ajustes o nuevos intentos en el caso de comprobar su desigualdad. La superposición sólo permite una verificación empírica acerca de si tuvieron éxito o no en sus resoluciones. Será necesario ir más allá, promover que intenten establecer por qué no coinciden, qué deberían haber tenido en cuenta para que coincidieran, es decir, introducirse en un proceso de validación que refiera a relaciones respecto de la figura, una validación argumentativa.

El hecho de que se utilice papel cuadriculado, tanto en el modelo como en la hoja para realizar la copia, permite, por una parte, apoyarse en el conocimiento del conteo para averiguar la longitud de los lados en términos de "cantidad de cuadraditos"; por otra parte, facilita tanto el reconocimiento como el trazado de los ángulos rectos; y, por último, constituye un soporte que facilita el trazado de los lados a mano alzada siguiendo las líneas de la cuadrícula. Desde luego, dicho trazado no será preciso (como se verá en las producciones infantiles que presentamos a continuación), pero ya dijimos que no es el objetivo de la secuencia. Nos interesa aquí en particular el análisis y reconocimiento de las formas por parte de los niños y no la habilidad en el dibujo por sí misma.

Si los alumnos tuvieran que realizar el copiado en hoja lisa, precisarían necesariamente usar la regla para transportar longitudes y la escuadra para trazar perpendiculares, conocimientos no disponibles para los niños del nivel. De todos modos, incluimos la regla graduada como material utilizable. Si bien muchos alumnos no le encuentran utilidad alguna, como se verá en los fragmentos de registros de clase, otros sí la utilizan para trazar los lados, y una alumna para establecer la longitud de éstos. La habilitación o no para usar determinados instrumentos modifica los conocimientos que los alumnos ponen en juego en el problema; por tanto, es un aspecto esencial a ser considerado en la planificación de la actividad. La inclusión de diversos instrumentos (cuadraditos y regla) y el permiso explícito acerca de que cada uno puede decidir qué y para qué los usa, sin mencionar ni inducir la utilización de ninguno de ellos, permite la aparición de una variedad de procedimientos que dará pie a la confrontación y análisis colectivo posterior.

Como mencionamos, si en la consigna o en las aclaraciones del docente durante la resolución se dijera a los chicos que cuenten los cuadritos o usen la regla para medir o para que quede bien derechito, nada de lo buscado sucedería. Los alumnos no podrían decidir; los conocimientos puestos en juego serían todos idénticos; los conocimientos aparecerían en escena por una indicación externa del maestro –no por constituir anticipaciones de los alumnos-, las producciones serían muy similares y por lo tanto no tendría sentido preguntar: "¿cómo lo hicieron?"; "¿alguien hizo algo diferente?"; "¿están de acuerdo con lo que dice Juan de que contar los cuadritos ayuda para que los cuadrados sean iguales?"; etcétera.

El trabajo en torno a este problema requiere aceptar que demandará varias clases, para que pueda dar lugar a un verdadero proceso de elaboración de conocimientos, que requiere atravesar diferentes momentos del trabajo, diferentes puestas en funcionamiento del concepto. Insistimos, no se espera que en la primera puesta en juego los alumnos establezcan las relaciones en las que estamos interesados. Por otra parte, planteamos la insuficiencia de este único copiado para el estudio de dichas propiedades. Será necesario trabajar en otras clases con el copiado de otras figuras (rectángulos, paralelogramos, triángulos) que hagan intervenir los mismos elementos y muestren las diferencias entre elementos relacionados que permitirán análisis más abarcativos acerca de los contenidos. Asimismo, será preciso incorporar una diversidad de problemas que apunten en la misma dirección.

En este apartado, quisimos detenernos a analizar cómo se ponen de manifiesto las condiciones reconocidas para que un problema permita promover un proceso de construcción de conocimientos en la sala. A continuación, presentaremos producciones de los alumnos.

Análisis de producciones de los alumnos

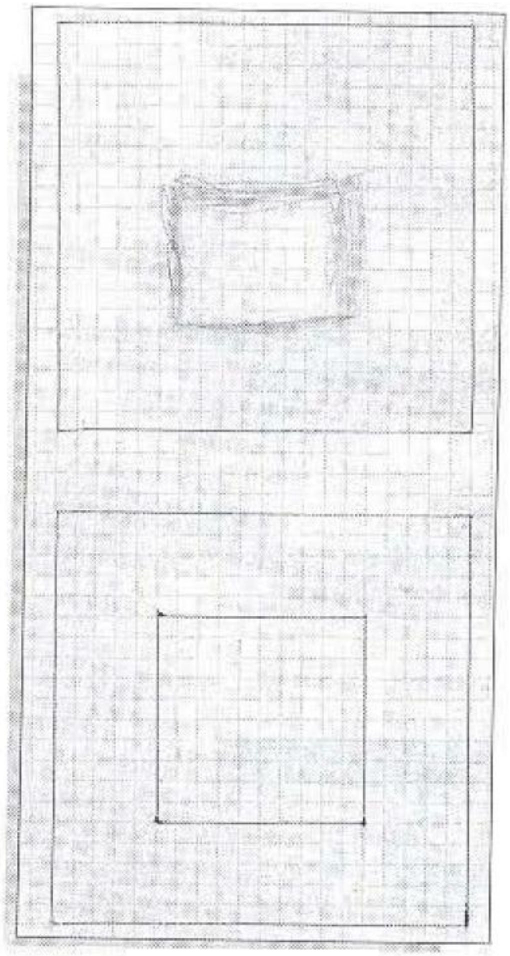
Incluimos aquí algunas de las producciones obtenidas a lo largo de tres clases en las que se trabajó sobre la copia de cuadrados.

Primera Clase

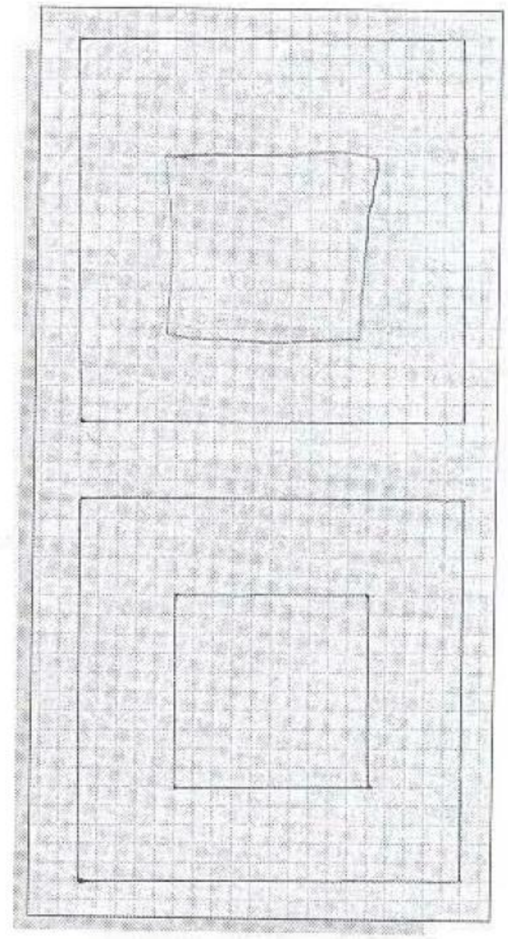
La consigna fue: *"tienen que copiar en la hoja cuadriculada una figura exactamente igual al modelo* (un cuadrado hecho sobre hoja cuadriculada). *Pueden utilizar lo que necesiten, lo único que no está permitido es calcarlo"*.

Inicialmente, tanto la directora como la maestra, quienes gestionaban conjuntamente la clase, dudaban acerca de que los chicos pudieran encontrar recursos para enfrentar la tarea propuesta. En sus propias palabras: "*Antes de comenzar con la actividad nos parecía que los chicos no iban a tener las herramientas suficientes como para poder resolverla, sin embargo, decidimos plantearla igual*".

En esa primera puesta en juego, la mayoría de los alumnos resolvió de manera intuitiva, dibujando un cuadrado "a ojo", dando lugar a producciones como las siguientes:



Reproducción 1.A



Reproducción 1.B

En el caso de la reproducción 1.A, su autor manifestó, a la hora de comunicar los procedimientos, "*lo miré muy bien y lo medí con el dedo*". Si bien no logra establecer igualdad en la medida de los lados, hay una primera aproximación al reconocimiento de la necesidad de establecer su longitud y de buscar un recurso para ello cuando afirma que medió con los dedos. Por otra parte, las relaciones entre los lados (formando ángulos rectos) fueron anticipadas.

La reproducción 1.B muestra claramente los distintos intentos que este alumno fue realizando: en el primero, pidió a su maestra que lo borrara *"porque me salió muy chico"*; en el segundo, volvió a pedirle que borrara *"porque me salió torcido"*; finalmente, con su último intento se sintió satisfecho: *"ahora sí que me quedó igual"*.

Nuevamente, tanto la estrategia como las validaciones son fundamentalmente empíricas, centradas en el ensayo y error, sin embargo, aquí también se observa el logro en la reproducción de los ángulos, cuestión que sólo es posible si se realiza un análisis de la figura modelo que involucra mucho más que lo meramente perceptivo. Por otra parte, esas primeras verificaciones darán lugar a relaciones que los alumnos podrán luego poner en juego, explicitar, en la búsqueda de argumentos racionales, que esgriman qué hace que una figura quede bien reproducida o no.

En la mayoría de las producciones de los otros alumnos de la sala, la resolución del trazado de los ángulos alcanza también mayores niveles de igualdad respecto al modelo que lo concerniente a la longitud de los lados. Esto seguramente está facilitado por los ángulos de la hoja cuadriculada.

En esta primera puesta en juego de la situación, ningún alumno logró una copia igual al modelo. Una sola alumna contó los cuadritos del lado superior, pero no logró hacer las líneas rectas, con lo cual no pudo mantener la igualdad.

Segunda clase

Nos interesa analizar producciones de las sucesivas clases para mostrar la evolución en las reproducciones; en consecuencia, la necesidad de considerar una secuencia de clases que se ocupen de estos aspectos del contenido.

Antes de comenzar la segunda producción, tanto la directora como la maestra pensaron que era necesario modificar la consigna dada en la clase anterior, ya que los chicos habían utilizado recursos que habitualmente usan en otras instancias (dedos, maderitas, etc.), pero no habían advertido la posibilidad de utilizar el cuadriculado de la hoja.

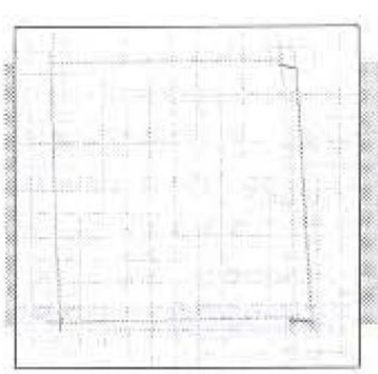
Agregaron entonces lo siguiente: *"Fíjense si hay algo en la hoja que les sirva para hacerlo exactamente igual al modelo"*.

Esta modificación en la consigna, sumada a que era la segunda vez que se enfrentaban con el mismo problema, facilitó la aparición casi mayoritaria de la estrategia del conteo de los cuadritos.

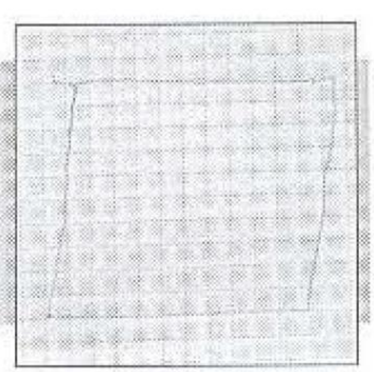
Seleccionamos dos producciones para compartir.

En el caso de la producción 2.A, nos parece interesante la justificación que la alumna hizo acerca de su reproducción. Mientras va repasando con el dedo los lados del cuadrado, dice: *"Para que las líneas te salgan igual tenés que contar los cuadritos, cuando llegás a la otra línea volvés a contar hasta la otra línea… siempre igual"*.

Puede apreciarse el avance en las conceptualizaciones. Tanto en la producción como en la validación, lo empírico queda relegado por el análisis de ciertas características de la figura. Eso es justamente lo que nos interesa.



Reproducción 2.A



Reproducción 2.B

En el caso de la producción 2.B, el alumno necesitó dos intentos para lograr la igualdad. Como puede observarse en el dibujo, en el primero, si bien respeta la cantidad de cuadritos por lado, no logra trazar los lados rectilíneos, razón por la cual no se superpone la copia con el modelo. Como él mismo dice: *"me salió torcido"*. En el segundo intento argumenta: *"me salió derechito porque las líneas de los cuadritos te sirven para hacerlos derechos, fui haciendo despacio, despacio y me salió"*.

Nuevamente en las dos producciones (como sucede con la mayoría), la cuestión de los ángulos no genera dificultad, si bien nadie argumenta al respecto ni hace explícito procedimiento alguno. Hicimos ya referencia al papel facilitador del cuadriculado de la hoja.

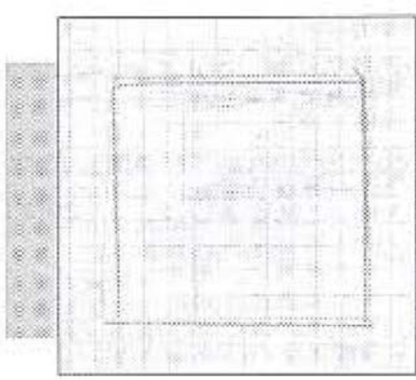
Tercera clase

Al finalizar la segunda clase, se organizó una puesta en común de la cual se analizan algunos aspectos a continuación de este apartado.

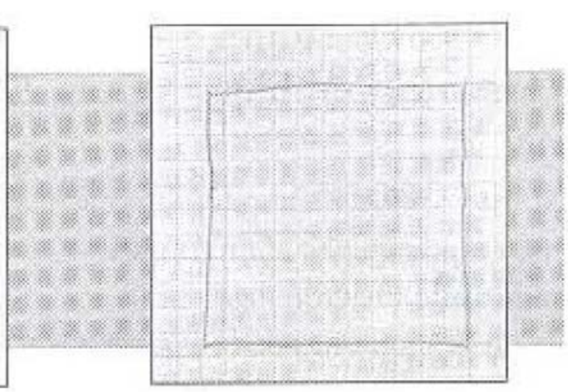
Luego de ese momento colectivo, las docentes a cargo de la clase decidieron llevar a cabo otra vuelta de copiado: *"Debido a la riqueza de los comentarios, nos parecían oportuno realizar una tercera producción para poder plasmar todo lo conversado en la puesta en común. Antes de iniciar la actividad se retomó lo conversado. Al repartir las hojas cuadriculadas y los modelos, todos pidieron una regla, pero en el transcurso de la resolución no todos sabían cómo usarla"*.

Esta intervención docente, consistente en recuperar conocimientos que ya han circulado en la sala en ocasiones anteriores a propósito de la resolución de un problema similar, permite la entrada a la tarea desde una perspectiva diferente. El aporte de Cande al decir *"Puedo usar la regla para hacerlo bien derecho"* y el de Inés acerca de la utilidad de la regla para medir la longitud de los lados reaparecen ahora como estrategias a seguir. Aunque algunos no pudieron finalmente utilizarla, quedó de todos modos instalada en el grupo la existencia de un instrumento que seguramente lograrán utilizar con el tiempo y frente a nuevos problemas donde sea herramienta de resolución.

Analicemos las siguientes producciones



REPRODUCCIÓN 3.A



REPRODUCCIÓN 3.B

En la reproducción 3.A, Denise logra la superposición de su reproducción con el modelo. Las docentes describen su trabajo de la siguiente manera: *"Cuenta los cuadritos y traza una línea derecha horizontal. En los extremos traza los ángulos rectos. Cuenta los cuadritos de las líneas verticales y dibuja los lados, nuevamente en los extremos dibuja los ángulos y finalmente une las dos líneas verticales formando, así, el cuadrado"*.

Cuando se le pidió que explicara cómo lo había hecho, Denise hizo hincapié en el trazado de los ángulos: *"Antes de hacer la línea hice las puntas, para que me quedaran bien derechitas. Es fácil, tenés que seguir el dibujo del cuadradito"*.

Como vemos, Denise explica la cuestión de los ángulos, aspecto que no había aparecido en las clases anteriores.

Con respecto a la producción 3.B, Inés apoyó la regla sobre la línea horizontal superior del modelo y se fijó que un extremo de la línea coincidía con el número 4 y, en el otro extremo, como no coincidía con un número exacto, apoyó el dedo.

Afirmó la regla en la hoja en blanco y marcó la línea entre el 4 y el dedo.

Luego hizo lo mismo con la otra línea horizontal y la dibujó *"justo justo" debajo de la otra. Para saber la distancia entre una y otra, ubicó las dos hojas a la misma altura y continuó la línea del modelo con el dedo hasta la hoja en blanco.*

Para hacer las dos verticales unió por los extremos las líneas horizontales.

Creemos que los procedimientos son bien elocuentes. Solo quisiéramos insistir en la necesidad de reinstalar los problemas para permitir a los niños construir con sentido sus conocimientos.

Creemos que los comentarios finales de las docentes expresan claramente lo anterior: "Sí bien las primeras producciones no fueron muy alentadoras y, en cierto modo, confirmaban nuestros temores de que la actividad era muy difícil, de más está decir que valió la pena seguir trabajando sobre la misma actividad, analizando las intervenciones e intercambiando procedimientos, porque de otro modo hubiésemos privado a los niños de la posibilidad de aprender, reflexionar y enriquecer sus saberes, y nos hubiese privado a nosotras de disfrutar situaciones que nos confirman que vale la pena seguir intentando y que realimentan el placer de enseñar y de aprender".

Algunas consideraciones en torno a los intercambios en la sala

Transcribimos aquí algunas afirmaciones e intercambios que tuvieron lugar en la misma sala en el momento de la puesta en común, después del segundo intento de copiado. Aquí queremos relevar cómo se ha extendido el recurso a:

- contar los cuadritos –lo que, en el primer copiado, sólo había aparecido en una alumna-; y
- la regla para trazar líneas rectas y –en forma muy minoritaria- para intentar medir.

Joaquín [refiriéndose a una copia]: *No, no es así, no quedó igual, las líneas son finitas; son derechas.*
M.: *¿Y cómo podríamos hacer para que salgan derechas?*
Cruz: *Yo usé maderitas* (material de la sala) *y no me sirvieron de nada.* [Había intentado medir con las maderitas.]
Inés: *Para poner las líneas en el mismo lugar podés usar os cuadritos. Hay que contar los cuadritos blancos hasta llegar a la línea y hago una igual acostada, después sigo contando hasta donde termina la línea parada y hago una igual.*
Ana: *Los cuadritos me sirvieron para hacer el cuadrado.*
M.: *¿Cómo es que sirven los cuadritos para hacer el cuadrado?*
Ignacio: *Te sirven para hacerlos derechos.*
Agustina: *Te sirven para saber cuándo hay que bajar.*
M.: *Chicos, miren, están diciendo que los cuadritos sirven para dos cosas, para hacer las líneas derechas y para saber hasta dónde llega. Veamos un poco eso. ¿Cómo los usan para hacer las líneas derechas?*
Juan: *Porque hacés así derechito* (señala el trazado siguiendo la línea de la cuadrícula).
M.: *Dice Juan que si uno dibuja arriba de la línea de la hoja le sale derecho.*
Varios alumnos asienten con la cabeza.
M.: *¿Y cómo es que sirven los cuadritos para saber hasta dónde llegan las líneas?*
Ana: *Contás cuántos hay.*
Mercedes: *Mirá, así* (muestra cómo cuenta los cuadritos).
M.: *Están diciendo que si contamos los cuadritos de toda la línea* (muestra) *sabemos hasta dónde llega, ¿están de acuerdo?*
Varios alumnos: *Sí.*
Sebastián: *Los cuadritos me sirvieron para hacerlo recto.*
M.: *Ah, como decíamos antes, que siguiendo los cuadritos se podía hacer la línea derechita.*
Cande: *Puedo usar la regla para hacerlo bien derecho.*
Agustín: *Se pueden contar los números de la regla.*
Inés: *Los números de la regla los podríamos poner arriba de la línea. Nos fijamos entre qué número está, y después la apoyamos en la otra hoja y*

hacemos la raya entre esos números.
M.: *Inés dice que se puede usar la regla mirando los números para hacer las líneas del mismo largo. ¿Están de acuerdo?*
(Silencio.)
Varios alumnos: *Mejor contar los cuadritos*.
M.: *Entonces, para saber hasta dónde llegan las líneas, ¿habría que contar los cuadritos de ésta, de ésta, de ésta y de ésta* (señalando cada uno de los lados del cuadrado)?
Algunos alumnos: *Sí.*
Agustín: *Es los mismo.*
Camila: *Si todos tienen los mismos cuadritos.*
M.: *¿Están de acuerdo que todas estas líneas, que se llaman lados, tienen la misma cantidad de cuadritos?*
Alumnos: *Sí*
M.: *¿Y si no tuvieran la misma cantidad de cuadritos?* (dibuja sobre una cuadrícula en el pizarrón un rectángulo).
Alumnos: *No, no es cuadrado*.
Joaquín: *Tiene que tenerlos todos iguales.*
Nicolás (mostrando su copia): *El mío me quedó más chico* (le había quedado un rectángulo, con los lados paralelos a los bordes laterales de la hoja más cortos que los del modelo) *porque no los hice iguales que éstos* (los lados paralelos a los bordes superior e inferior de la hoja).
Inés: *Te quedó un rectángulo, no un cuadrado, está achatado.*
Mercedes: *Si no, no es cuadrado.*
M.: *¿Si no, qué, Mercedes? ¿Por qué no es cuadrado?*
Mercedes: *Tiene que tener todos éstos* (señala los lados) *iguales.*
M.: *Estas líneas, cada uno de estos bordes se llaman lados. Dice mercedes que si no tiene los lados iguales no es un cuadrado, ¿ustedes qué piensan?*
Varios alumnos: *Sí, tienen que ser iguales.*

Nicolás: *Con los mismos cuadraditos.*

M.: *Muy bien chicos, cuántas cosas que aprendimos hoy. Miren lo que dijeron:*

- *Se pueden usar los cuadraditos de la hoja para hacer las líneas bien derechas.*
- *También para contarlos y saber hasta dónde llegan.*
- *Se puede usar la regla para hacer las líneas derechitas o para usar los números y saber hasta dónde llegan.*
- *Les conté también que estas líneas se llaman lados y ustedes me dijeron que, para que sea cuadrado, todos los lados tienen que ser iguales, tienen que tener la misma cantidad de cuadritos.*

Vamos a detenernos ahora a analizar algunas cuestiones que tuvieron lugar en este intercambio colectivo. En principio, señalemos que buena parte de lo que sucedió en esta instancia –explicitaciones, aclaraciones, precisiones, circulación de conocimientos, análisis de producciones distantes del modelo, establecimiento de conclusiones a retener, etc.- no hubiera tenido lugar si la actividad se hubiese limitado a la resolución del copiado sin esta discusión. Es decir, este momento continúa el proceso de validación que se inició cuando los alumnos superpusieron sus producciones con los modelos e intentaron buscar explicaciones a las diferencias entre ambos. En otros términos, en estas interacciones de todo el grupo se continúa con el proceso de elaboración de conocimientos iniciando en el momento de resolución; son pues constitutivas de la construcción del sentido de los conocimientos que estamos enseñando.

El hecho de que los conocimientos comiencen a difundirse dentro del grupo no implica que todos inmediatamente se apropien de ellos. Algunos lo harán –y así es como asistimos a producciones que recurren a ellos en las clases siguientes, otros necesitarán más tiempo, nuevas instancias de reproducción de figuras y discusión, nuevas actividades, etcétera. Forma parte de la heterogeneidad propia de todos los grupos escolares. Por otra parte, esta heterogeneidad es necesaria para producir las confrontaciones que buscamos en los intercambios entre alumnos. Estamos pensando en un proceso de elaboración a largo plazo, no se trata de adquisiciones inmediatas sino de construcciones que poco a poco van avanzando.

Una cuestión que aparece claramente en este registro de clase es cómo un mismo instrumento puede servir para diferentes usos: la regla o la cuadrícula para trazar líneas rectas o para medir. Estas diferentes formas de recurrir al mismo instrumento se ponen aquí “sobre la mesa”. La maestra no continuó la línea abierta por el uso de la regla como instrumento de medición, por considerar que la discusión había sido ya lo suficiente densa como para volver a detenerse en una afirmación muy compleja acerca de un recurso que, por otro lado, tenía aún un uso muy minoritario.

Mencionamos la necesidad de estos momentos de análisis con todo el grupo en torno a las producciones. Como puede notarse, tales momentos no se gestan solos, requieren de intervenciones docentes que los instalen y sostengan. En principio, hay una gestión de la clase previa, durante la resolución, que mantuvo una incertidumbre acerca de la corrección de las producciones. Es decir, el objeto de discusión aquí fue a qué se debieron las distancias entre reproducciones y modelos y cómo hacer para evitarlas. Si la docente hubiese informado previamente a los alumnos si estaban bien o mal sus copias y por qué, todo el trabajo de análisis posterior hubiera carecido de sentido.

Por otro lado, hay una comprensión por parte del docente de la orientación hacia dónde se dirige la secuencia, hacia dónde conducir las producciones e intercambios, sobre qué aspectos centrar la discusión, detenerse, abrir, señalar. También esta comprensión permite una tolerancia hacia producciones más distantes del original o hacia afirmaciones erróneas.

Lejos de encontrarnos con una maestra que deja que los chicos trabajen solos o se limita a escuchar lo que dicen "espontáneamente", pregunta, dirige la discusión hacia los aspectos que quiere trabajar, explica, da información, aclara, también pide aclaraciones, repite lo que dijo algún alumno para que todos puedan escucharlo, reitera las conclusiones a las que arribaron. En próximas clases, podrá recordar estas conclusiones al grupo para que sean tenidas en cuenta a la hora de nuevas resoluciones o nuevos análisis.

Para terminar

Como ya hemos expresado, la situación de reproducción de un cuadrado se trata sólo de una actividad que requiere incluirse en un proyecto de enseñanza mucho más amplio y diverso de tareas.

Para concluir, nos interesaría relevar algunas de las cuestiones analizadas a lo largo del trabajo. La búsqueda de problemas fértiles para promover los aprendizajes a los que apuntamos es una cuestión indispensable a la hora de pensar la enseñanza de la geometría, pero de ningún modo suficiente. Sin el componente de una gestión docente de la clase que instale y sostenga la actividad matemática descriptiva –basada en anticipaciones frente a problemas y validaciones-, la producción de conocimientos perseguida no tiene lugar. Vimos también que se trata de una gestión que asume diferentes momentos del trabajo matemático, no sólo de resolución sino también de análisis sobre lo realizado: momentos donde se trata de instalar y sostener a los alumnos en un proceso de resolución más autónoma, de promover interacciones entre ellos, búsquedas de validaciones, señalar conclusiones, brindar información, recordar conocimientos ya visitados, etcétera.

Con respecto a esto último, por ejemplo, en el caso particular del registro que hemos analizado, la docente recuperó en la tercera clase las conclusiones a las que habían llegado sus alumnos previamente.

- *Los lados del cuadrado son todos iguales.*
- *La hoja con cuadritos sirve para contarlos y hacerlos del mismo tamaño y para poder dibujar los lados derechos.*
- *La regla sirve para hacer las líneas derechas.*
- *La regla sirve para medir en qué número empieza y termina cada lado.*
- *Los lados "doblan derechito"; "en punta"; "doblan igual que los de los cuadritos de la hoja".*

Hasta allí, los aprendizajes están vinculados exclusivamente con algunas de las propiedades del cuadrado. Para lograr que los alumnos se apropien de los contenidos vinculados con las figuras geométricas, esta actividad debe incluirse en una propuesta que incluya a otras situaciones que permitan, por parte, avanzar en el reconocimiento y análisis de diferentes figuras y, por otra parte, relativizar y precisar las características identificadas: ¿todas las figuras tienen las mismas características que los cuadrados? ¿En qué se parecen y en qué se diferencian? Otras actividades posibles para continuar este proceso podrían ser:

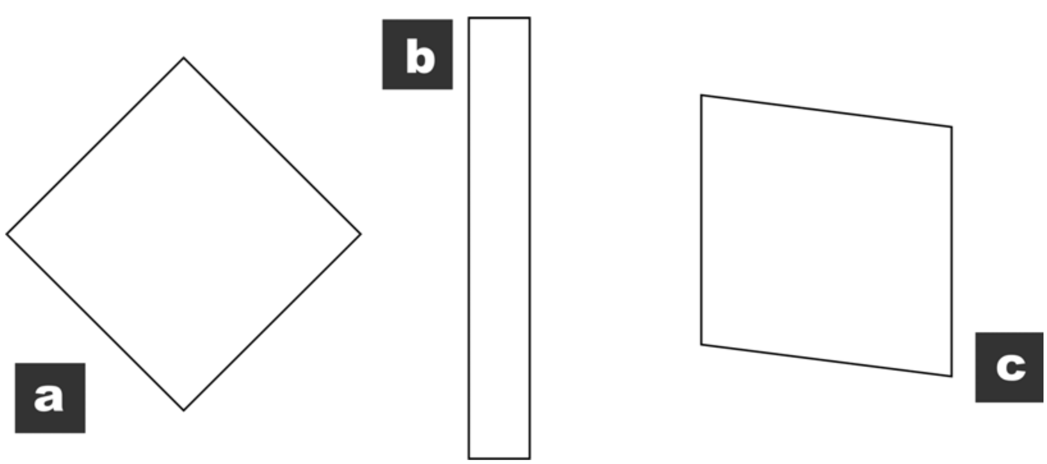
- **Reproducción de un rectángulo.** Como la hoja del modelo y la hoja para reproducirlo siguen siendo cuadriculadas, los alumnos apelarán al conteo de los cuadritos para medir la longitud de los lados. Nuevamente, la cuestión de los ángulos y las relaciones de paralelismo entre los lados estarán resueltas por el cuadriculado de la hoja. Se pone en cuestión aquí la relación establecida respecto de la igualdad de los lados. Apuntamos a que la intencionalidad del docente en el análisis colectivo esté dirigida a que los alumnos reflexionen acerca de las igualdades y diferencias entre estas dos figuras (cuadrado y rectángulo), para que puedan construir relaciones que permitan avanzar en sus conocimientos sobre ellas.
- **Reproducción de un paralelogramo propiamente dicho.** El soporte material sigue siendo hojas cuadriculadas. El trazado del modelo debe cuidar que los lados oblicuos estén apoyados sobre las diagonales de los cuadraditos, para facilitar su reproducción. El interés es que los alumnos descubran que los lados de todas las figuras no "doblan derechitos". Las reflexiones deberán estar dirigidas nuevamente a establecer relaciones con lo que ya saben. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian los paralelogramos de los cuadrados y de los rectángulos? Los chicos logran establecer estas relaciones y concluyen que no se parecen en nada con los cuadrados y que "son como un rectángulo torcido".
- **Reproducción de triángulos.** Hasta aquí los alumnos han podido analizar cuadriláteros. La introducción de los triángulos permite flexibilizar ese conocimiento enfrentándose a figuras con diferente cantidad de lados. Podrán encontrar algunas relaciones vinculadas a los conocimientos previstos y otras que difieren completamente. Es de suma importancia que se ofrezcan como modelos diferentes tipos de triángulos. En general, se tiende a presentar solamente triángulos equiláteros o isósceles, restringiendo de ese modo las aproximaciones que los chicos pueden hacer, o promoviendo que liguen sus conceptualizaciones sobre los triángulos a unos casos particulares de ellos. No estamos pensando de ningún modo en que expliciten las clasificaciones por relaciones de lados o ángulos, ni tampoco sus denominaciones, son aspectos que abordarán a lo largo de la educación básica. Si nos interesa que, desde temprano, se enfrenten a la mayor diversidad de triángulos posibles para indagar qué hace que esas figuras sean triángulos.
- **Continuación de una guarda –igualmente sobre hoja cuadriculada-.** Debiendo entonces reproducir un conjunto de figuras geométricas en una disposición determinada.
- **Reproducción de una configuración.** Constituida por diversas figuras geométricas dispuestas también de una determinada manera.

Un espacio importante a cuidar en la enseñanza de las figuras geométricas es la estereotipia con la que suelen mostrarse las representaciones de estas figuras. Por ejemplo, frecuentemente, los cuadrados se presentan "apoyados" por su base, con sus lados paralelos a los bordes de la hoja. Esta presentación privilegiada o única de los cuadrados provoca que muchas veces no se reconozcan cuadrados en otras posiciones, sosteniendo erróneamente en esos casos que se trataría de rombos. Otro ejemplo lo constituyen la relación estable entre la medida de los lados cortos y largos de los rectángulos que en general, guarda una proporción determinada. Los paralelogramos propiamente dichos también suelen "apoyarse" sobre su base, con la inclinación hacia la derecha y con el ángulo inferior izquierdo de aproximadamente 45°. Mencionamos ya la presencia privilegiada de algunos tipos de triángulos.

Por estas presentaciones casi exclusivas de las figuras geométricas, muchos alumnos desconocen las siguientes figuras por no mantener la ubicación espacial y las relaciones de longitud de sus lados a las que han sido habituados.

Si el reconocimiento se basa sólo en que responde a la "figura tipo", entonces las conceptualizaciones no son las que buscamos. Como vimos, los niños pueden argumentar que es un cuadrado si todos los lados miden lo mismo y "doblan derechito". ¿Por qué entonces no plantear como problema la verificación de si la figura a) lo es o no?

Esta presencia exclusiva o muy privilegiada de ciertos dibujos para las figuras, trae como consecuencia el establecimiento de "figuras tipo", unas representaciones determinadas para dichos objetos por parte de los sujetos. Estas representaciones que los niños están comenzando a construir cumplen, por un lado, un papel importante y productivo en tanto permiten una referencia rápidamente disponible de las figuras. Pero, por otro lado, es necesario cuidar que no se conviertan en representaciones únicas e inamovibles, de modo tal que terminen ligando las conceptualizaciones sobre la figura en cuestión a características que no las definen (posición, relación entre las medidas de los lados del rectángulo o del paralelogramo, etc.). Por eso, planteamos la necesidad de presentar una variedad de figuras que



permitan que estas representaciones puedan flexibilizarse.

Reiteramos, no esperamos que los chicos descubran todas las propiedades de las figuras, pero eso no significa que desde el inicio no puedan hacerse cargo de un trabajo centrado en la construcción del sentido de los conocimientos.

Este inicio de conceptualizaciones acerca de las figuras debe superar el reconocimiento perceptivo. No se espera que puedan definir las figuras dando condiciones necesarias y suficientes, sino poner en juego algunas de sus características: cantidad de lados, presencia de lados rectilíneos o no, posición de los lados rectilíneos con otros, presencia de ángulos rectos o no, longitud de los lados, emplazamiento de las figuras unas en relación con las otras, vocabulario, etcétera.

La reproducción exige la toma de decisiones en relación con estas características de las figuras. Dichas decisiones involucran los conocimientos que perseguimos.

Por último, quisiéramos alertar sobre dos posibles asimilaciones de estas actividades a ciertas rutinas del jardín. Por ejemplo, es habitual ver todo el grupo sentado en una ronda mientras el docente presenta la actividad, pide a uno o a unos pocos alumnos que la resuelvan a vista de todos –quizás en una cuadrícula sobre el pizarrón-, o pregunta cómo podría copiarse esa figura para que quede igualita, etcétera. Es cierto que, a diferencia de tener a todos los niños, con sus modelos y la hoja para realizar la reproducción en forma individual, sin que el docente pueda estar siguiendo simultáneamente las resoluciones de cada uno de ellos, la ronda con alguno o algunos respondiendo o resolviendo permite la ilusión de cierto “control” sobre lo que está teniendo lugar en la sala.

Sin embargo, en este último caso, pensamos si verdaderamente se instala una genuina actividad de resolución, quiénes son los que realizan las anticipaciones, es decir, quiénes toman las decisiones, quiénes entran en el juego matemático en el cual queremos introducir a todos los alumnos. Por otra parte, haber asistido a que se mostraran de antemano procedimientos de solución lleva a borrar o diluir la diversidad que necesitamos para posibilitar y enriquecer la confrontación posterior.

Otra identificación que querríamos evitar es la del momento de análisis colectivo con las rondas de intercambio habituales en el jardín. Las instancias de discusión que proponemos no consisten en que cada uno cuente cómo lo hizo o cómo le resultó, sino que el docente seleccione producciones y aspectos hacia dónde va a conducir una discusión y análisis, interviniendo decisivamente en esa dirección.

En síntesis, analizamos en estas páginas una actividad de copiado de figuras en una sala de cinco años tratando de reflexionar, a partir de ella, acerca de algunas cuestiones que consideramos centrales para la enseñanza de las figuras geométricas en el nivel inicial, vinculadas con ciertas condiciones que, desde nuestra perspectiva, permiten promover un tipo particular de actividad matemática en las salas.